B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND XL, I

VORLESUNGEN ÜBER ZAHLEN- UND FUNKTIONENLEHRE

VON

ALFRED PRINGSHEIM
PROFESSOR DER MATHEMATIK
AN DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

ERSTER BAND

ZAHLENLEHRE



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1916

B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND XL, I.1

VORLESUNGEN ÜBER ZAHLENLEHRE

(REELLE UND KOMPLEXE ZAHLEN UNENDLICHE ALGORITHMEN)

VON

ALFRED PRINGSHEIM
PROFESSOR DER MATHEMATIK
AN DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

ERSTE ABTEILUNG

REELLE ZAHLEN UND ZAHLENFOLGEN



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1916

Published by Permission of the Attorney General in the Public Interest
under License No. A-772

Published by J. W. Edwards
Ann Arbor, Michigan
1948

Lithoprinted by Edwards Brothers, Inc.
Ann Arbor, Michigan, U.S.A.

Vorwort.

Das vorliegende in zwei Bände eingeteilte Werk ist durch Zusammenfassung und teilweise weitere Ausführung einer Folge von Vorlesungen entstanden, die mit mannigfachen Umgestaltungen und Vervollkommnungsversuchen periodisch wiederkehrend seit einer langen Reihe von Jahren an der Universität München von mir gehalten wurden. Es geschah dies in der Absicht, den Studierenden der Mathematik, insbesondere schon denjenigen der ersten Semester eine auf ausschließlicher Benützung elementarer Methoden beruhende, streng und einheitlich aufgebaute und zugleich nach Möglichkeit ausgebaute Darstellung der Hauptlehren der Funktionentheorie und ihrer arithmetischen Grundlagen zu bieten. Eine ausführliche Behandlung dieser Grundlagen bildet den Inhalt des ersten Bandes. Derselbe enthält außer der Lehre von den rationalen Zahlen im wesentlichen eine systematische Bearbeitung desjenigen Stoffgebietes, über welches in meinen Enzyklopädieartikeln: „Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse“ und „Unendliche Prozesse mit komplexen Termen“ berichtet wurde (mit Ausschluß der Lehre von den unendlichen Determinanten). Der zweite Band gibt dann eine Einführung in die Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen und der einfachsten mehrdeutigen Umkehrungsfunktionen auf Grund der Weierstraßschen Methoden und deren weiterer Ausbildung, namentlich in bezug auf die Theorie der ganzen transzendenten Funktionen und der analytischen Fortsetzung.

Bei der Abfassung des Buches habe ich, wie ja schon dessen Entstehungsweise vermuten läßt, in erster Linie an solche Leser gedacht, welche noch im Anfange ihrer mathematischen Studien stehen. Irgendwelche mathematischen Vorkenntnisse sind zum Verständnisse des ersten Bandes überhaupt nicht erforderlich, und, was für das Studium des zweiten Bandes als unentbehrlich vorausgesetzt wird, reduziert sich auf die Kenntnis einiger Begriffe und Sätze aus den Anfangsgründen der elementaren und der analytischen Geometrie. Auch die an die Auffassungsgabe des Lesers gestellten Anforderungen halten sich, wie ich glaube, in sehr mäßigen Grenzen, und ich würde eher fürchten, eines stellenweise gar zu niedrigen Darstellungsniveaus oder allzu großer Breite geziehen zu

werden, wenn nicht meine langjährigen Lehrerfahrungen mich hoffen ließen, in dieser Hinsicht annähernd das richtige getroffen zu haben. Daß trotz des elementaren Charakters der Darstellung durchweg möglichste Strenge der Beweisführung angestrebt wird, bedarf wohl kaum der Erwähnung, da dies nach meinem Dafürhalten als selbstverständliche Forderung jeder mathematischen Darstellung gelten sollte. Um die Aufmerksamkeit des Lesers nicht in unnötiger, nach meinem Dafürhalten häufig geradezu als störend empfundener Weise von dem systematischen Gange der Untersuchung abzuziehen, sind (mit verschwindenden Ausnahmen) etwaige Quellenangaben, literarische Hinweise, historische Bemerkungen und sonstige allenfalls wünschenswert erscheinende Ergänzungen in einen besonderen, am Ende jedes einzelnen Bandes befindlichen Anhang verwiesen. Im übrigen sei noch ausdrücklich hervorgehoben, daß der Inhalt dieser Vorlesungen keineswegs nur auf die Entwicklung der notwendigsten *Elemente* der in Betracht kommenden Gebiete sich beschränkt. Vielmehr suchte ich bei der Behandlung der einzelnen Gegenstände eine gewisse, über den nächstliegenden Bedarf des Anfängers wesentlich hinausgehende Vollständigkeit zu erreichen. Und als leitenden Grundgedanken, der mir in gleicher Weise bei der Abfassung des arithmetischen, wie des funktionentheoretischen Teils vorschwebte, möchte ich die Durchführung der Absicht bezeichnen, die *elementaren Methoden* nach Möglichkeit *auszunützen* bzw. weit genug *auszubilden*, um den Leser mit den modernen Verschärfungen und Vertiefungen der Begriffe und Fragestellungen vertraut machen zu können und ihn so nahe, wie es die Einfachheit der aufgewendeten Hilfsmittel irgend gestattet, an die Grenzen unserer heutigen Erkenntnis heranzuführen. Hiernach hege ich die Hoffnung, daß diese Vorlesungen auch fortgeschrittneren Lesern merklichen Nutzen gewähren und, zum mindesten in bezug auf die Art der Darstellung, auch der Beachtung der eigentlichen Fachgenossen nicht unwert sein dürften.

Der *erste*, als *Zahlenlehre* bezeichnete *Band* erscheint in drei *Abteilungen*, deren jede, unbeschadet des zwischen ihnen bestehenden Zusammenhanges, ein vollständig abgeschlossenes Stoffgebiet umfaßt. Diese Zerlegung dürfte namentlich denjenigen Studierenden willkommen sein, welche von der *ersten*, die Einführung und Ausgestaltung des reellen Zahl- und Grenzbegriffes enthaltenden *Abteilung* zunächst nur als einer passenden Ergänzung zu den üblichen Vorlesungen über Infinitesimalrechnung Gebrauch machen wollen, da in diesen letzteren die für jedes tiefere Verständnis der Analysis unentbehrlichen arithmetischen Grundlagen erfahrungsgemäß aus Mangel an Zeit entweder als im wesentlichen bekannt vorausgesetzt oder zum mindesten nicht mit genügender Ausführlichkeit behandelt zu werden pflegen.

Bezüglich der zweckmäßigsten Einführungsart des Zahlbegriffs scheinen zwischen den Mathematikern noch immer recht erhebliche Meinungsverschiedenheiten zu herrschen. Ich habe mich von jeher der zuerst wohl von Heine scharf ausgesprochenen, insbesondere auch von Helmholtz mit Nachdruck vertretenen Auffassung angeschlossen, die unter *Zahlen* lediglich ein geordnetes, bestimmten Verknüpfungsregeln genügendes *System von Zeichen* verstanden wissen will und somit eine vollständige Trennung der reinen *Zahlenlehre* von der *Größenlehre* anstrebt. In der vorliegenden Darstellung gehe ich insofern noch einen Schritt weiter, als ich den Begriff der *natürlichen* Zahl zunächst an ein ganz *spezielles* Zeichensystem, nämlich an dasjenige unserer dekadischen Ziffernschrift knüpfe. Indem ich dieses Zeichensystem in bestimmter Anordnung auf Grund genau beschriebener rein kombinatorischer Regeln gewissermaßen vor den Augen des Lesers entstehen lasse, gewinne ich eine „kanonische Form" für die unbegrenzt fortsetzbare, geordnete Folge der natürlichen Zahlen, sodaß die *Existenz* dieser letzteren damit für mich außer Frage steht (selbst auf die Gefahr hin, daß unerbittliche Logiker, Axiomatiker oder Mengentheoretiker hiergegen Widerspruch erheben sollten). Für die in diesem Zusammenhange lediglich als *Ordinalzahlen* auftretenden natürlichen Zahlen wird die *Addition* nach dem Vorgange von H. Graßmann rekursorisch definiert, sodann das assoziative und kommutative Verhalten einer Summe von der Form $a + b + c$ in bekannter Weise durch vollständige Induktion abgeleitet (deren Zulässigkeit ich als eine unmittelbare Folge der bloßen Existenz der geordneten Reihe der natürlichen Zahlen betrachte). Um das Vorhandensein jener Eigenschaften auf „beliebige" Summen übertragen zu können, erweist sich der Begriff der *Anzahl* als unentbehrlich, und es wird daher zunächst gezeigt, wie die bisher geschaffenen *Ordinalzahlen* als *Anzahlbezeichnungen* oder, wie man zu sagen pflegt, als *Kardinalzahlen angewendet* werden können.

Es folgt alsdann die rekursorische Behandlung der *Multiplikation* mit ihren charakteristischen Eigenschaften und, im Anschluß an die *Umkehrung* der beiden genannten fundamentalen Rechnungsoperationen, die Einführung neuer Zahlen: der *Brüche* (aus Zweckmäßigkeitsgründen *zuerst*), sowie der *Null* und der *negativen* Zahlen. Für die Feststellung, wie diese neuen Zahlen zu *ordnen* bzw. in die Folge der schon vorhandenen *einzuordnen* sind und wie mit ihnen *gerechnet* werden muß, dient das gewöhnlich nach dem Vorgange von Hankel (nicht besonders glücklich) als Prinzip der „*Permanenz*" formaler Gesetze bezeichnete *Übertragungsprinzip* und zwar in einer nach meinem Dafürhalten merklich verbesserten Form, welche ihm den Charakter einer gewissen logischen Notwendigkeit verleiht. Es werden nämlich allemal *neue Zahlzeichen* in solchem Umfange

eingeführt, daß eine Teilmenge derselben lediglich neue Zeichen für *bereits vorhandene* Zahlen vorstellt. Für diese letzteren bestehen also schon ganz bestimmte, auf die Feststellung ihrer Sukzession und die Definition der Rechnungsoperationen bezügliche Regeln, die sich ohne weiteres in die neuen Bezeichnungen *um*schreiben lassen. Soll dann in der Handhabung des gesamten neu geschaffenen Zeichenvorrats nicht eine vollständige Verwirrung eintreten, so bleibt kaum etwas anderes übrig, als jene für einen Teil desselben bereits zu Recht bestehenden Regeln definitionsweise auf die Gesamtheit auszudehnen und diesen Schritt durch den Nachweis zu legitimieren, daß die so getroffenen Festsetzungen den an sie zu stellenden Anforderungen widerspruchslos genügen.

Das soeben geschilderte Verfahren, welches zunächst Anwendung findet, um das ursprüngliche Gebiet der *natürlichen* Zahlen zu demjenigen der *rationalen* zu erweitern, leistet nicht minder gute Dienste bei der Einführung der *irrationalen* Zahlen, welche im wesentlichen nach der Méray-Cantorschen Methode erfolgt. Als Vorbereitung dient eine ausführliche Behandlung der Lehre von den *systematischen Brüchen* (Systembrüchen), die insbesondere dazu führt, in den unbegrenzt fortsetzbaren *periodischen* Systembrüchen bzw. einer von mir als *rational-konvergente Zahlenfolgen* bezeichneten Verallgemeinerung derselben, brauchbare Äquivalente, also *neue Zahlzeichen* für die bereits vorhandenen *rationalen* Zahlen zu gewinnen. Durch bloße *Übertragung* der für Anordnung und Verknüpfung der rationalen Zahlen bestehenden Gesetze *in die neue Schreibweise* ergibt sich dann ohne weiteres ein entsprechender Komplex *bereits gesicherter* Regeln für jene neue Art von Zahlzeichen, und es bedarf nur der Ausdehnung dieser Regeln auf *beliebige* unbegrenzt fortsetzbare *Systembrüche* bzw. *konvergente Zahlenfolgen* („Fundamentalreihen“ in der Cantorschen Bezeichnung) einschließlich des oben angedeuteten ergänzenden Nachweises, um damit alles erforderliche für die Einführung der allgemeinen *reellen* bzw. der hierbei als neu hinzutretenden *irrationalen* Zahlen zu leisten.

Nach einem Exkurs über die *Abzählbarkeit* der rationalen und auch der algebraischen, die *Nichtabzählbarkeit* der irrationalen Zahlen folgt die Einführung des *Grenzbegriffs* einschließlich der *„uneigentlichen“* Grenzwerte $+\infty$ und $-\infty$, sowie die Formulierung des sogenannten *allgemeinen Konvergenzprinzips*, d. h. die Aufstellung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die *Existenz des Grenzwertes* einer abzählbaren Zahlenmenge. Die weitere Ausbildung der Rechenoperationen mit allgemeinen reellen Zahlen führt sodann zur Definition und genaueren Untersuchung der *Potenzen* mit (positiver Basis und) *beliebigem Exponenten* und der *Logarithmen*, insbesondere der *natürlichen* Logarithmen und ihrer Basis e.

Hieran schließen sich die Einführung der *unteren* und *oberen Grenze*, die Weiterbildung des *Grenzwert*begriffes zum *unteren* bzw. *oberen Limes* und zur *Häufungszahl*, ferner die Untersuchung der sogenannten *unbestimmten Quotienten* und die Graduierung des *Unendlich-* und *Nullwerdens*, sowie die Aufstellung von *Unendlichkeitsskalen*. Mit einer eingehenden Untersuchung der *zweifach-unendlichen Zahlenfolgen* und der dabei zum Vorschein kommenden Grenzwertmöglichkeiten schließt diese *erste* Abteilung.

Die *zweite* Abteilung enthält eine ausführliche Theorie der unendlichen Reihen mit reellen Gliedern, die *dritte*, außer der Einführung der komplexen Zahlen und der hierdurch erforderlich werdenden Vervollständigung der Reihenlehre, die Theorie der unendlichen Produkte und Kettenbrüche, dazu den oben erwähnten Anhang und ein alphabetisches Sachregister.

München, im April 1916.

Inhaltsverzeichnis.

Abschnitt I.

Reelle Zahlen und Zahlenfolgen.

Einleitung.

Kapitel I.

Die rationalen Zahlen.

Kapitel II.

Begrenzte und unbegrenzte Systembrüche. — Rational-konvergente Zahlenfolgen.

Kapitel VI.

Zweifach unendliche Zahlenfolgen (Doppelfolgen).

Abschnitt I.

Reelle Zahlen und Zahlenfolgen.

Einleitung.

Begriff und allgemeine Eigenschaften der reellen Zahlen.

Unter dem Inbegriffe der *reellen Zahlen* verstehen wir eine *geordnete, unbegrenzte* Menge durch *Vereinbarung* festgesetzter, bestimmten *Verknüpfungsregeln* genügender *Zeichen*.

Zur *vorläufigen* Erläuterung der in dieser Aussage zusammengefaßten Haupteigenschaften der reellen Zahlen diene folgendes:

1. Die Menge der reellen Zahlen ist eine *„geordnete“*, d. h. *jedem* der fraglichen *Zeichen* kommt innerhalb ihrer Gesamtheit ein *eindeutig bestimmter Platz* oder *Rang* zu, jedoch *verschiedenen* Zeichen *nicht* allemal *verschiedene* Plätze. Bedeuten also a und b zwei *verschiedene Zeichen* des Systems, so kann der Fall eintreten, daß a und b *denselben* Platz (Rang) einnehmen: dann ist b *dieselbe Zahl* wie a, anders gesprochen, b ist dann nur *ein anderes Zeichen* für die Zahl a. Wir drücken diesen Sachverhalt schematisch durch die Schreibweise aus:

(1) $$a = b \quad \text{oder auch:} \quad b = a.$$ [1]

In jedem anderen Falle besteht eine eindeutige Bestimmung darüber, daß a entweder dem b *vorangeht* oder ihm *nachfolgt*, in Zeichen:

(2) $a < b$ bzw. (3) $a > b$.[2]

---

1) Z. B. $\frac{1}{2}$ ist eine bestimmte Zahl und $\frac{2}{4}$, 0,5, 0,4999 ... sind *andere Zeichen* für $\frac{1}{2}$, daher schreiben wir:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \quad \text{(s. § 7, S. 38)}$$
$$= 0{,}5 \quad \text{(s. § 17, S. 99)}$$
$$= 0{,}4999\ldots \quad \text{(s. § 20, S. 119).}$$

2) Hierbei wird also zunächst der Begriff der *geordneten* Menge an eine bestimmte *räumliche* Anschauung geknüpft. Indessen geschieht dies lediglich, um die

Da bei derjenigen fundamentalen *Anwendung* der reellen Zahlen[1]), welcher sie überhaupt ihre *Einführung* verdanken (nämlich bei ihrer Verwertung zur *Beschreibung* von *Mengenbeziehungen zählbarer* oder von *Größenbeziehungen meßbarer* Dinge), jene Relationen (1), (2), (3) den Begriffen: *„gleich"*, *„kleiner"*, *„größer"* in der üblichen empirischen Bedeutung entsprechen, so werden wir, abgesehen von den beiden ersten Paragraphen, als sprachlichen Ausdruck für die Beziehungen (1), (2), (3) uns stets der *Redewendungen* bedienen:

(1a) a ist *gleich* b oder b ist *gleich* a,

(2a) a ist *kleiner* als b, bzw. (3a) a ist *größer* als b.

Dabei ist aber festzuhalten, daß *trotz dieser Ausdrucksweise* die Relationen (1) generell zunächst nur die *Vertauschbarkeit*, die Relationen (2) und (3) eine bestimmte *Sukzession* von a und b bedeuten, und es sei ausdrücklich hervorgehoben, daß ihre Auffassung als *Mengen-* oder *Größenbeziehungen* ohne eine entsprechende *Umdeutung* der Bezeichnungen *„kleiner"* und *„größer"* in unendlich vielen Fällen geradezu *widersinnig* erscheinen würde.[2])

Auffassung zu erleichtern und ist prinzipiell durchaus entbehrlich. Man hat, um zu dem Begriffe einer *geordneten* (zweiseitig unbegrenzten) Menge von irgendwelchen Elementen zu gelangen, nur folgende Festsetzungen zu treffen:

(I) Die Gesamtheit aller von irgendeinem Elemente a *verschiedenen* Elemente zerfällt in *zwei* getrennte Klassen von Elementen b bzw. b'. Die Zugehörigkeit zu der einen oder anderen Klasse wird dargestellt durch eine der beiden Beziehungen:

$$b < a, \quad a < b',$$

und zwar kann dann nicht gleichzeitig $a < b$ bzw. $b' < a$ sein.

(II) Aus $b < a$, $a < b'$ folgt allemal:

$$b < b',$$

und diese Beziehung besteht dann unabhängig von der Wahl der Zahl a.

(III) Die Beziehung

$$b' > b$$

ist lediglich eine (aus Zweckmäßigkeitsgründen wünschenswerte) *andere Schreibweise* der Beziehung $b < b'$.

1) Genauer gesagt: eines *Teiles* der reellen Zahlen, nämlich der sog. *absoluten* oder *positiven*.

2) Dies gilt nicht nur für Relationen wie:

$$-1 < 0, \quad -2 < -1 \quad \text{(s. § 12, S. 70, Ungl. (11))},$$

sondern auch schon für:

$$0 < 1 \quad \text{(§ 12, S. 70, Ungl. (11))}.$$

Denn betrachtet man etwa 1 als Symbol irgendeiner meßbaren Größe (z. B. Strecke, ebenen Figur usw.), so entspricht dem Zeichen 0 überhaupt *keine damit vergleichbare*. Die Auffassung der Relation $0 < 1$ als *Größenbeziehung* wäre also gerade so widersinnig, als ob man sagen wollte: Ein *Punkt* ist *kürzer* als eine gewisse *Strecke*; eine *Strecke* ist *schmaler* als ein gewisses *Rechteck* usf.

2. Die Menge der reellen Zahlen ist *„unbegrenzt“* in dem folgenden Sinne[1]: es gibt in der Sukzession der reellen Zahlen *keine erste* („kleinste“) und *keine letzte* („größte“); und es gibt auch stets *eine* Zahl (und folglich deren *unbegrenzt viele*) *zwischen* irgend zwei beliebigen. Sind also a, b irgendzwei Zahlen von der Beschaffenheit, daß $a < b$, so gibt es stets Zahlen a', b', c, derart, daß:

$$a' < a < b' < b < c. \tag{4}$$

3. Die eben näher beschriebene *Unbegrenztheit* der Menge der reellen Zahlen, d. h. *Zahlzeichen*, schließt keineswegs aus, daß diese letzteren *durch Vereinbarung vollkommen fixiert* erscheinen. Hierzu bedarf es lediglich einer *begrenzten* Anzahl geordneter *Fundamentalzeichen* („Ziffern“) und sodann eines *Gesetzes*, nach welchem aus diesen durch Verbindung und Wiederholung, allenfalls mit Hinzunahme gewisser *Hilfszeichen* (wie des *Minuszeichens* bei den „negativen“ Zahlen, des *Bruchstriches* oder des *Kommas* bei den „gewöhnlichen“ bzw. „Dezimalbrüchen“), immer *neue Zeichen* zu bilden und der *Sukzession* der bereits vorhandenen *anzureihen* bzw. *einzuordnen* sind.

4. Die bei der Definition der Zahlen ausdrücklich erwähnten *Verknüpfungsregeln* („*Rechnungsregeln*“, „*Rechnungsoperationen*“) besagen, daß bestimmte, zumeist durch *besondere Zeichen* („*Rechnungszeichen*“, „*Operationszeichen*“) kenntlich gemachte *Verbindungen zweier oder mehrerer Zahlen* durch *eine einzige* ersetzt werden können; in schematischer Darstellung:

$$R(a, a', a'', \cdots) = b, \tag{5}$$

wo $R(a, a', a'', \cdots)$ eine geeignete Verbindung der reellen Zahlen $(a, a', a'', \cdots)$, b eine reelle Zahl vorstellt.

Im folgenden werden die Verknüpfungsregeln zunächst für eine spezielle, zur sinnlichen Erfahrungswelt in besonders einfacher Beziehung stehende Klasse reeller Zahlen (der sog. „natürlichen“) definiert; gewisse, naturgemäß hieraus erwachsende Probleme führen dann sukzessive zur weiteren Ausgestaltung des Zahlengebietes.

---

1) Das Wort *„unbegrenzt“* wird hier in Ermanglung einer anderen passenden Bezeichnung in umfassenderer Bedeutung gebraucht, als sonst in der Zahlenlehre üblich ist und auch späterhin ausschließlich geschieht.

Kapitel I.

Die rationalen Zahlen.

§ 1. Die natürlichen Zahlen.

1. Es sei eine endlose Folge von *Zeichen* durch folgende Merkmale charakterisiert: sie selbst und jede durch Weglassung von Anfangsgliedern entstehende Teilfolge *beginnt* mit einem bestimmten Zeichen und kann nach bestimmten Regeln *unbegrenzt* fortgesetzt werden, derart daß man imstande ist, zu *jedem* einzelnen Zeichen *das unmittelbar folgende* und, abgesehen von dem Anfangsgliede, auch *das unmittelbar vorangehende* mit eindeutiger Bestimmtheit anzugeben, daß ferner ein bereits vorhandenes Zeichen *niemals wiederkehrt* und daß sich stets mit Sicherheit feststellen läßt, *welches* von zwei beliebig aus der Folge herausgegriffenen Zeichen dem anderen *vorangeht.* Eine solche Zeichenfolge könnte man auf primitivste Art *aus einem einzigen Fundamentalzeichen,* etwa |, durch sukzessive Wiederholung herstellen, also:

$$|,\ ||,\ |||,\ ||||,\ |||||,\ \cdots,$$

doch wäre sie wegen ihrer außerordentlichen Unübersichtlichkeit gänzlich unbrauchbar. Man wird also zur Herstellung einer Zeichenfolge der fraglichen Art sich *mehrerer Fundamentalzeichen* (in gedächtnismäßig eingeprägter Anordnung) und der durch systematische Verbindung und Wiederholung daraus zu bildenden *Zeichengruppen* bedienen. Es leuchtet unmittelbar ein, daß man auch *verhältnismäßig entfernte* Glieder der Zeichenfolge um so *kürzer* und daher auch um so *übersichtlicher* zusammensetzen kann, *je mehr einfache Fundamentalzeichen* man zur Verfügung hat, daß aber andererseits mit der *Vermehrung* der Fundamentalzeichen die Schwierigkeit der gedächtnismäßigen Einprägung dieser Zeichen und ihrer Reihenfolge wächst, somit die *Übersicht* in gewissem Sinne auch wieder eine *Erschwerung* erleidet. Über die Zweckmäßigkeit einer bestimmten Wahl entscheidet schließlich Erfahrung und Gewöhnung. Ohne uns an dieser Stelle auf Erörterung verschiedener Möglichkeiten, auf historische oder psychologische Betrachtungen einzulassen, wollen wir uns an die Tatsache halten, daß man sich heutzutage zur Erreichung

des gedachten Zweckes bei den Völkern abendländischer Kultur ganz allgemein der sogenannten *arabischen Ziffern* und der *dekadischen Schreibweise* bedient, und wollen zeigen, wie man mit diesen Hilfsmitteln sich wirklich ein Zeichensystem mit den verlangten Eigenschaften verschaffen kann, auch wenn man vorläufig von der „additiven" Bedeutung jener „dekadischen" Schreibweise[1]) vollständig absieht und rein mechanisch oder, präziser ausgedrückt, rein *kombinatorisch* dabei zu Werke geht.

2. Als *Fundamentalzeichen* dienen die *„Ziffern"*:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

und dazu als *Hilfszeichen* für die weitere Zeichenbildung noch die *Ziffer* 0. Jene ersteren bilden in der angeschriebenen *Reihenfolge* die Anfangsglieder der fraglichen Zeichenfolge, deren *einfache* Zeichen damit erschöpft sind und für deren Fortsetzung vermittelst sukzessive zu bildender Ziffernverbindungen die folgenden Regeln gelten:

(1) Alle Verbindungen, welche mit 0 *anfangen*, sind wegzulassen. Im übrigen gilt 0 bei dem noch anzugebenden Verfahren zur Herstellung und Anordnung der zu bildenden Verbindungen als die *niedrigste*, der 1 also noch *vorangehende* Ziffer.

(2) Man bilde jetzt alle möglichen (d. h. immer ausschließlich der mit 0 anfangenden) Verbindungen je *einer* Ziffer mit *jeder anderen* und mit *sich selbst* und beginne dabei mit derjenigen, welche aus den *niedrigsten* Ziffern besteht, also, da 00 und 01 auszuschließen sind, mit 10. Sodann ersetze man die *letzte* Ziffer durch die *nächst höhere*, solange eine solche vorhanden ist. Man erhält auf diese Weise als auf 10 folgend die Zahlzeichen 11 bis 19 in der üblichen Anordnung.

(3) Da jetzt eine weitere Erhöhung der letzten Ziffer unmöglich ist, so ersetze man die *vorangehende* durch die nächst höhere, also 1 durch 2, dagegen die *letzte* durch 0. Man erhält auf diese Weise 20 und sodann durch Anwendung des in (2) beschriebenen Verfahrens die Zahlzeichen 21 bis 29.

(4) So fortfahrend gelangt man schließlich zu dem Zahlzeichen 99, welches eine weitere Erhöhung der vorhandenen Ziffern nicht zuläßt. Man muß daher zur Bildung neuer Zeichenverbindungen eine weitere Ziffer zu Hilfe nehmen und beginnt im Anschluß an das bisher beobachtete Verfahren mit der *niedrigsten* überhaupt zulässigen Verbindung der entsprechenden Art, also mit 100. Indem man sodann auf die *letzte* bzw. auf die *beiden letzten* Stellen das analoge Verfahren wie bisher anwendet, gelangt man sukzessive zu dem Zahlzeichen 199, aus welchem, immer

1) Davon wird bei späterer Gelegenheit noch die Rede sein: s. § 15 (S. 95).

wieder nach dem gleichen Prinzip, das Zahlzeichen 200 als das nächstfolgende hervorgeht.

Es ist klar, daß sich dieses Verfahren zur Erzeugung immer neuer, *in einer ganz bestimmten Ordnung* auftretender Zahlzeichen *unbegrenzt* fortsetzen läßt. Man findet zu *jedem* einzelnen dieser Zahlzeichen das *unmittelbar folgende*, indem man die *letzte* (d. h. am *rechten* Ende stehende) Ziffer durch die *nächst höhere* ersetzt, was nur dann unmöglich wird, wenn diese letzte Ziffer 9 ist. In diesem Falle *erhöhe* man die vorletzte, oder wenn auch diese bzw. noch eine oder mehrere sich unmittelbar anschließende die 9 sein sollten, die (sc. bei Zählung von rechts nach links) *erste von* 9 *verschiedene Ziffer* und ersetze zugleich jede *vorangegangene* 9 durch 0; oder aber, wenn *alle* Stellen mit 9 besetzt sind, so füge man am *linken* Ende eine 1 hinzu und besetze alle übrige Stellen mit 0.

3. Um festzustellen, daß in der soeben beschriebenen, unbegrenzt fortsetzbaren Zeichenreihe kein Zeichen *wiederkehren* kann, bemerke man zunächst, daß durch jedes einzelne Zeichen nicht nur, wie eben gezeigt, das unmittelbar *folgende*, sondern auch, wie zu Anfang dieses Paragraphen ausdrücklich verlangt wurde, das unmittelbar *vorangehende* völlig *eindeutig bestimmt* ist, ausführlicher gesagt, daß man zu jedem jener Folge willkürlich entnommenen Zeichen (selbstverständlich außer 1) das unmittelbar *vorangehende* durch Umkehrung des eindeutig definierten Erzeugungsprozesses sofort *herstellen* kann: man hat nur die *letzte* Ziffer durch die *nächst niedrigere* zu ersetzen; sollte aber die letzte Ziffer und eventuell auch noch eine oder mehrere unmittelbar vorangehende 0 sein, so hat man die (bei Zählung von rechts nach links) *erste von* 0 *verschiedene Ziffer* durch die *nächst niedrigere*, jede *vorangegangene* 0 durch 9 zu ersetzen; nur wenn *alle* Ziffern mit Ausnahme der ersten 0, die erste aber 1 ist, so hat man diese wegzulassen und alle übrigen Stellen mit 9 zu besetzen. Man kann hiernach aus jedem beliebig herausgegriffenen Zeichen durch *Rückbildung* auch die gesamte Folge der *vorhergehenden* bis zum Anfangsgliede 1 ableiten.

Angenommen nun, irgendein Zeichen, das a genannt werden möge, käme an einer späteren Stelle der Folge, wo wir es b nennen wollen[1]), *nochmals* vor. Alsdann müßte nach dem eben gesagten auch das dem a unmittelbar vorangehende Zeichen mit demjenigen, welches unmittelbar dem b vorangeht, also wiederum mit einem *später* vorkommenden Zeichen übereinstimmen. Und durch Fortsetzung dieser Schlußweise würde sich schließlich ergeben, daß auch das Zeichen 1 an einer späteren Stelle der

1) Der Unterschied in der *Benennung* bezieht sich lediglich auf die Verschiedenheit der *Stellen*, an welchen das betreffende Zeichen vorkommt. Als bloße *Zeichen* betrachtet sind a und b als völlig identisch anzusehen.

Zeichenfolge *nochmals* vorkommen müßte, was doch auf Grund ihres Bildungsgesetzes ausgeschlossen erscheint.

4. Es bleibt noch zu zeigen, daß die gegenseitige Stellung zweier beliebig aus der Folge herausgegriffener Zeichen, die wir wieder mit a und b bezeichnen wollen, durch *Vergleichung* dieser Zeichen stets mit Sicherheit erkannt werden kann. Man schreibe die einzelnen Ziffern des einen Zeichens, von links beginnend, genau unter die entsprechenden des anderen, anders ausgesprochen, man ordne jeder Ziffer des einen Zeichens, von links beginnend und der Reihe nach fortschreitend, eine Ziffer des anderen zu. Dabei sind zwei verschiedene Fälle möglich. Im *ersten*, dem offenbar *allgemeineren*, werden bei dieser gegenseitigen paarweisen Zuordnung die Ziffern des einen Zeichens schon erschöpft sein, während von denen des anderen, z. B. von b, noch ein *Überschuß* vorhanden ist. Dann nimmt offenbar b in der Zeichenfolge einen *späteren* Platz ein, als a. Denn da bei der sukzessiven Herstellung der Zeichen wohl Ziffern *hinzugefügt*, dagegen bereits vorhandene niemals schlechthin *weggelassen*, sondern nur durch andere *ersetzt* werden, so folgt, daß b nur erzeugt werden konnte, nachdem a schon vorhanden war. In dem *zweiten* (dem spezielleren) Falle werden die Ziffern von a und b paarweise gegeneinander aufgehen. Vergleicht man dann, von links anfangend, die Ziffern von a und b, so können diese keinesfalls *durchweg* paarweise übereinstimmen, da ja, wie in Nr. 3 gezeigt wurde, b nicht mit a identisch sein kann. Es muß also eine *erste* Stelle geben, an der das eine Zeichen, z. B. wieder b, eine *höhere* Ziffer aufweist, als das andere. Dann geht aber wiederum aus dem Erzeugungsgesetz der betrachteten Zeichenfolge unzweideutig hervor, daß b dabei später zum Vorschein kommt als a, also in der geordneten Zeichenfolge einen *späteren* Platz einnimmt.

5. Das vorstehend beschriebene *Zeichensystem* bezeichnen wir als die *geordnete Folge der natürlichen Zahlen*, jedes *einzelne* dieser *Zeichen* als *natürliche Zahl.* Damit soll aber nicht etwa gesagt sein, daß *nur* diese Zeichen als natürliche Zahlen anzusehen sind. Andere Zeiten, andere Völker benützten und benützen *andere Zeichen* als natürliche Zahlen, wir selbst bedienen uns gelegentlich *römischer* Ziffern, und die Ausbildung unserer Arithmetik liefert sogar, wie sich im Verlaufe unserer Untersuchungen noch im einzelnen zeigen wird, für *jede* natürliche Zahl *unbegrenzt viele Zeichen*[1]) zur Anwendung für besondere Zwecke oder in einem bestimmten Zusammenhange. Allen diesen Möglichkeiten gegenüber

1) Z. B. uneigentliche Brüche (s. § 8, S. 41), dyadische Zahlen bzw. Zahlen anderer, nach dem Muster der dekadischen gebildeter Systeme (s. § 15, S. 95), reinperiodische Dezimalbrüche mit der Periode 9 oder dyadische Brüche mit der Periode 1 (s. § 20, S. 120) usf.

bildet das obige Zeichensystem gewissermaßen eine *kanonische Form* für die Folge der natürlichen Zahlen, welche zeigt, daß wir in der Tat imstande sind, mit verhältnismäßig sehr geringen Hilfsmitteln (nämlich gedächtnismäßiger Einprägung der Ziffern 0, 1, 2, $\cdots$, 9 nach Form und Reihenfolge nebst Beherrschung der wenigen in Nr. 2 angegebenen Regeln) ein äußerst übersichtliches Zeichensystem von der zu Anfang dieses Paragraphen bezeichneten Beschaffenheit herzustellen.

Im Anschluß an diese Betrachtungen erscheint also die *natürliche Zahl* als ein *Ordnungs-* oder *Stellenzeichen* d. h. als ein Zeichen, dem in einer geordneten Folge analoger Zeichen eine *bestimmte Stelle* zukommt und das daher als *Kennzeichen* für diese bestimmte Stelle (als *„Platznummer“*) dienen kann. Das in Frage kommende Stellenzeichen tritt nämlich auf als *letztes* eines gewissen Abschnittes jener geordneten Folge, welcher auf Grund bestehender Vorschriften *eindeutig bestimmt* ist, d. h. Glied für Glied *hergestellt* werden kann.

Die *geordnete Folge der natürlichen Zahlen* beginnt mit einem bestimmten *ersten* Gliede, sie besitzt aber *kein letztes* Glied, sondern ist *unbegrenzt fortsetzbar*.

6. Zur Darstellung *allgemeiner* Beziehungen zwischen *beliebigen* natürlichen Zahlen sind die bisher betrachteten *speziellen* Zahlzeichen untauglich. Wir benutzen in diesem Falle als Zahlzeichen irgendwelche Buchstaben und zwar bis auf weiteres *kleine lateinische Buchstaben* in *der* Weise, daß ein solcher Buchstabe, z. B. a, *jede beliebige* natürliche Zahl (also jedes beliebige der Zeichen 1, 2, 3, $\cdots$ *in inf.*) vorstellen kann, jedoch innerhalb eines abgeschlossenen Zusammenhanges stets *ein und dieselbe* Zahl.

Werden dann zwei im übrigen ganz beliebig zu denkende Zahlen a und b der Bedingung unterworfen, daß in der geordneten Zahlenfolge a dem b *vorangehen* soll, also b dem a *nachfolgt*, so schreiben wir:

$$a < b \quad \text{bzw.} \quad b > a,$$

in Worten: a ist *vor* b, bzw. b ist *nach* a; oder auch: a ist die *frühere*, b die *spätere* Zahl.

Aus den Voraussetzungen

$$a < b,\ b < c \quad \text{bzw.} \quad c > b,\ b > a$$

folgt dann ohne weiteres:

$$a < c \quad \text{bzw.} \quad c > a.$$

Besteht in irgendeinem Zusammenhange die zweifache Möglichkeit, daß *entweder* a und b *dieselbe* Zahl vorstellen *oder* a eine dem b *vorangehende*, so schreiben wir, um dies zum Ausdruck zu bringen:

$$a \leqq b \quad \text{bzw.} \quad b \geqq a.$$

§ 2. Addition natürlicher Zahlen.

1. Es sei a eine beliebige (natürliche) Zahl. Dann soll die auf a *unmittelbar folgende* durch die Zeichenverbindung $a + 1$ (in Worten: *a plus eins*) dargestellt werden. Es ist also $a + 1$ ein *neues* Zeichen für eine in der Folge der natürlichen Zahlen *bereits vorhandene* Zahl. Ersetzt man in dieser Aussage die willkürlich zu denkende Zahl a der Reihe nach durch die speziellen Zahlen 1, 2, 3 usf., so bestehen demnach die *Gleichungen:*

$$1 + 1 = 2, \quad 2 + 1 = 3, \quad 3 + 1 = 4 \text{ usf.}$$

Es erscheint zunächst unmöglich, die *allgemeine* Form dieser Gleichungen in *der* Weise anzuschreiben, daß man für jene *speziellen* Zahlen $1, 2, 3, \cdots$ wieder die „*allgemeine*“, d. h. willkürlich anzunehmende Zahl a einführt, aus dem einfachen Grunde, weil ja das *Zeichen* für die auf a *folgende* Zahl erst feststeht, sobald wir für a irgendeine bestimmte *spezielle* Zahl wählen. Wenn wir indessen festsetzen, daß für den augenblicklich vorliegenden Zweck die auf a unmittelbar folgende Zahl *aushilfsweise* mit $\bar{a}$ bezeichnet werden möge, so können wir die obigen *speziellen* und *alle analogen* Gleichungen in die eine *allgemeine* zusammenfassen:

(A) $$a + 1 = \bar{a},$$

welche dann die allgemeine *Definition* der Zeichenverbindung $a + 1$ enthält, nämlich:

> $a + 1$ ist ein *neues* Zeichen für die auf *a folgende*, also für eine völlig *bestimmte*, in der natürlichen Zahlenreihe *wirklich vorhandene* Zahl.

Wir verallgemeinern nun diese Definition zunächst dahin, daß wir setzen:

$$a + 2 = \bar{a} + 1,$$

oder auch, indem wir statt $\bar{a}$ das durch Formel (A) bereits definierte Zeichen $a + 1$ einführen:

$$a + 2 = (a + 1) + 1.$$

Dabei sollen die *Klammern*, in welche wir $a + 1$ gesetzt haben, lediglich dazu dienen, um das aus den Zeichen a, $+$ und 1 *zusammengesetzte* Symbol als Zeichen für *eine* ganz bestimmte *Zahl* kenntlich zu machen und von dem noch folgenden $+ 1$ *deutlich zu scheiden.*

In analoger Weise *definieren* wir weiter:

$$a + 3 = (a + 2) + 1$$

und schließlich *allgemein*, wenn n eine *beliebige* Zahl bedeutet:

(B) $$a + (n + 1) = (a + n) + 1.$$

Durch diese „*Rekursionsformel*" in Verbindung mit der „*Anfangsgleichung*" (A) ist offenbar das Zeichen $a + b$ für jedes beliebige a und jedes $b > 1$ *vollständig definiert.* Bezeichnet man nämlich für den Augenblick mit $\underline{b}$ diejenige Zahl, welche der Zahl b in der Zahlenreihe unmittelbar *vorangeht*, sodaß also: $\underline{b} + 1 = b$, so hat man in Gl. (B) nur n der Reihe nach durch $1, 2, \cdots, \underline{b}$ zu ersetzen, um sukzessive für $a + 2$, $a + 3, \cdots, a + b$ mit Benutzung von Gl. (A) je eine bestimmte *Zahl* der natürlichen Zahlenreihe zu erhalten.

2. Die in der Herstellung der Zahl $a + b$ bestehende „*Rechnungsoperation*" wird als *Addition* oder *Summation* der Zahlen a und b bezeichnet; die durch das Symbol $a + b$ dargestellte, in der Zahlenreihe sicher vorhandene und eindeutig bestimmte *Zahl* heißt die *Summe* der beiden *Summanden* a und b. Man bemerke, daß bei der oben gegebenen Definition von $a + b$ die beiden *Summanden* a und b eine wesentlich *verschiedene* Rolle spielen, welche durch ihre *Stellung* innerhalb der Verbindung $a + b$ deutlich gekennzeichnet ist: von dem *ersten* Summanden a ausgehend bildet man zunächst $a + 1$, sodann auf Grund der Formel (B): $a + 2 = (a + 1) + 1$ usf. bis $a + b$. Es erscheint nun wesentlich nachzuweisen, daß in Wahrheit $a + b$ von der *Stellung* der Summanden *unabhängig* ist, d. h. daß die Zeichenverbindung $b + a$ *dieselbe* Zahl vorstellt, wie $a + b$. Um dies feststellen zu können, bedürfen wir zuvor einer Verallgemeinerung der Grundformel (B), welche man als das *Assoziationsgesetz* der Addition zu bezeichnen pflegt, nämlich:

Lehrsatz I. *Die Addition ist assoziativ, d. h. man hat:*

$$a + (b + c) = (a + b) + c. \tag{I}$$

Beweis. Die behauptete Beziehung (I) ist offenbar richtig für $c = 1$, da sie in diesem Falle mit der Grundformel (B) zusammenfällt, sobald man die dort mit n bezeichnete Zahl durch b ersetzt.

Angenommen nun, Gl. (I) gelte bei *beliebigem* a, b für *irgendeine spezielle* Zahl $c = c'$ (wie dies nach dem eben gesagten für $c = 1$ tatsächlich der Fall ist), sodaß also:

$$a + (b + c') = (a + b) + c',$$

so besteht auch noch Gleichheit, wenn man für $a + (b + c')$ und $(a + b) + c'$ die *nächstfolgende* Zahl substituiert, d. h. man hat:

$$(a + (b + c')) + 1 = ((a + b) + c') + 1,$$

und, wenn man auf beide Seiten dieser Gleichung die (rückwärts gelesene) Grundformel (B) anwendet:

$$a + ((b + c') + 1) = (a + b) + (c' + 1).$$

Durch nochmalige Anwendung von Gl. (B) ergibt sich sodann:

$$(b+c')+1=b+(c'+1),$$

und daher schließlich:

$$a+(b+(c'+1))=(a+b)+(c'+1),$$

in Worten: Gilt Gl. (I) für ein bestimmtes $c=c'$, so gilt sie auch noch für die *nächstfolgende* Zahl $c=c'+1$. Da aber, wie bemerkt, Gl. (I) für $c=1$ stattfindet, so gilt sie auf Grund des eben gefundenen Resultates zunächst auch für $c=2$, infolgedessen auch für $c=3$ usf., d. h. schließlich für *jedes* c.[1])

3. Nunmehr sind wir imstande, auch das oben bereits angekündigte sogenannte *Kommutationsgesetz* der Addition zu beweisen, nämlich:

Lehrsatz II. *Die Addition ist kommutativ, d. h. man hat:*

(II) $$a+b=b+a.$$

Beweis. Wir beweisen die Richtigkeit der Gl. (II) zunächst für den speziellen Fall $b=1$, d. h. wir zeigen, daß für *jedes beliebige* a:

(II') $$a+1=1+a.$$

Man erkennt zunächst, daß diese letztere Gleichung jedenfalls für den speziellen Fall $a=1$ *richtig* ist, da in diesem Falle beide Seiten die *identische* Form $1+1$ annehmen. Angenommen nun, sie gelte überhaupt für *irgendeine spezielle* Zahl $a=a'$, sodaß also:

$$a'+1=1+a',$$

so folgt zunächst wiederum, daß auch

$$(a'+1)+1=(1+a')+1$$

sein muß, und, wenn man auf die rechte Seite dieser Gleichung die Grundformel (B) (rückwärts gelesen) anwendet:

$$(a'+1)+1=1+(a'+1),$$

in Worten: Gilt Gl. (II') für $a=a'$, so gilt sie auch noch für die *nächstfolgende* Zahl $a=a'+1$. Da sie aber, wie bemerkt, für $a=1$ Geltung hat, so gilt sie schließlich wiederum für *jedes* a. Anders ausgesprochen: Die Gültigkeit von Gl. (II) ist hiernach zunächst bewiesen für jedes *beliebige* a und die *spezielle* Zahl $b=1$.

Wird nun wiederum angenommen, die Gl. (II) gelte bei *beliebigem* a für *irgendeine spezielle* Zahl $b=b'$, sodaß also:

$$a+b'=b'+a,$$

1) Das soeben benützte und auch im folgenden beständig wiederkehrende Beweisverfahren wird als *„vollständige Induktion"* oder auch als *„Schluß von n auf $(n+1)$"* bezeichnet (wobei also im Text c' die Rolle der generell mit n bezeichneten Zahl spielt).

so hat man zunächst auch:

$$(a+b')+1=(b'+a)+1$$

und daher mit Benutzung des speziellen Kommutationsgesetzes (II'):

$$(a+b')+1=1+(b'+a).$$

Wendet man auf die *linke* Seite dieser Gleichung die (rückwärts gelesene) Grundformel (B), auf die *rechte* das allgemeine Assoziationsgesetz (I) an, so folgt:

$$a+(b'+1)=(1+b')+a$$

und schließlich durch Anwendung von (II') auf $(1+b')$:

$$a+(b'+1)=(b'+1)+a.$$

Darnach gilt wiederum die fragliche Gl. (II) für $b=b'+1$, sobald ihre Richtigkeit für $b=b'$ feststeht. Und da das letztere für $b=1$ tatsächlich der Fall ist, so ist damit ihre Allgemeingültigkeit bewiesen.

4. Neben den für die Addition natürlicher Zahlen fundamentalen *Gleichungen* (I) und (II) bestehen für sie noch die folgenden charakteristischen *Ungleichungen:*

(III) $$a+b>a,$$

(IV) $$a+b>a'+b, \quad \text{wenn} \quad a>a'.$$

Beweis zu (III). Angenommen, Ungl. (III) gelte für irgendeine spezielle Zahl $b=b'$, sodaß also:

$$a+b'>a,$$

so folgt *a fortiori*

$$(a+b')+1>a$$

und durch Anwendung von Gl. (I) auf die *linke* Seite dieser Ungleichung:

$$a+(b'+1)>a,$$

d. h. Ungl. (III) gilt, wenn sie für $b=b'$ richtig ist, auch für die *nächstfolgende* Zahl $b=b'+1$ und somit für *jede* folgende. Da sie aber auf Grund der *Definition* von $a+1$ sicher für $b=1$ besteht, so gilt sie schließlich für *jedes* b.

Beweis zu (IV). Angenommen, Ungl. (IV) gelte wiederum für $b=b'$, sodaß also:

$$a+b'>a'+b' \quad (\text{wenn: } a>a'),$$

so folgt zunächst:

$$a+b'\geqq(a'+b')+1,$$

also:

$$(a+b')+1>(a'+b')+1$$

und sodann durch Anwendung von Gl. (I):

$$a+(b'+1)>a'+(b'+1),$$

d. h. die fragliche Ungleichung gilt dann schließlich für *jede* Zahl $> b'$. Da aber aus der Voraussetzung $a > a'$ folgt: $a \geqq a' + 1$ und daher: $a + 1 > a' + 1$, so gilt sie zunächst für $b = 1$ und somit allgemein.

Als Zusatz zu (IV) bemerke man noch, daß (IV) auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$a' + b < a + b, \quad \text{wenn:} \quad a' < a,$$

oder wenn man a und a' miteinander vertauscht:

(V) $$a + b < a' + b, \quad \text{wenn:} \quad a < a'.$$

Da man außerdem, genau wie die *Ungleichung* (IV), durch vollständige Induktion auch die *Gleichung* herleiten kann[1]):

(VI) $$a + b = a' + b, \quad \text{wenn:} \quad a = a',$$

so erkennt man, daß die Beziehungen (IV), (V), (VI) auch *umkehrbar* sind, d. h. aus:

(IVa) $a + b > a' + b$ folgt allemal, daß: $a > a'$,
(Va) $a + b < a' + b$ „ „ „ $a < a'$,
(VIa) $a + b = a' + b$ „ „ „ $a = a'$.

Schließlich ergibt sich durch Anwendung des Kommutationsgesetzes, daß nach Analogie von (IV), (V), (VI):

(IVb) $a + b > a + b'$, wenn: $b > b'$, und umgekehrt,
(Vb) $a + b < a + b'$, „ $b < b'$, „ „
(VIb) $a + b = a + b'$, „ $b = b'$, „ „

und durch kombinierte Anwendung von (IV), (IVb) oder (VI), (IVb) bzw. (IV), (VIb):

(VII) $$a + b > a' + b',$$
$$\text{wenn:} \quad a \geqq a', \quad b > b',$$
$$\text{oder:} \quad a > a', \quad b \geqq b'.$$

Man bemerke, daß die Formeln (III)—(VI)[2]), welche die älteren

---

1) In Wahrheit folgt dieselbe schon aus der *Bedeutung* der Beziehung $a = a'$ und der *Eindeutigkeit* der Addition. Da nämlich nach Gl. (1) der Einleitung die Voraussetzung $a = a'$ nichts anderes bedeutet als: a' ist lediglich *ein anderes Zeichen* für a, so folgt, daß auch $a + b = a' + b$.

2) In Worten:
Eine Summe ist größer als jeder der Summanden.
Gleiches zu Ungleichem addiert gibt Ungleiches.
Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches.
Ungleiches zu Gleichem addiert gibt Ungleiches. —
Der gleichfalls sonst als *Axiom* auftretende Satz:
„Sind zwei *Größen* einer dritten gleich, so sind sie untereinander gleich" —

Arithmetiker, ebenso wie auch die Gleichungen (I), (II), als *Axiome* an die Spitze ihrer Betrachtungen zu stellen pflegten, bei der hier gegebenen Darstellung sich als *beweisbare* Folgerungen unmittelbar aus den *Definitions*gleichungen (A), (B) der Addition ergeben haben.

5. Um den Begriff der *Addition* zu erweitern, *definieren* wir zunächst die *Summe* $a+b+c$ durch die Formel:

(1) $$a+b+c=(a+b)+c.$$

Da hiernach $a+b+c$ eine eindeutig bestimmte, in der Zahlenreihe sicher vorhandene *Zahl* bedeutet, so können wir weiter definieren:

(2) $$a+b+c+d=(a+b+c)+d \quad \text{usf.}$$

Nach dieser *Definition* erscheint jede solche *Summe* zunächst abhängig von der *Reihenfolge* der *Summanden* und auch von der *Anordnung* der sukzessive vorzunehmenden *Additionen*. Wir wollen nun zeigen, daß dies tatsächlich *nicht* der Fall ist, und führen zunächst den betreffenden Beweis für eine Summe von der Form $a+b+c$.

Da nach Definitionsgleichung (1):

$$a+b+c=(a+b)+c,$$

so folgt zunächst durch Anwendung des Assoziationsgesetzes (I), daß auch:

$$a+b+c=a+(b+c),$$

in Worten: Eine Summe von der Form $a+b+c$ ist bei Festhaltung der gegebenen Anordnung der Summanden *unbeschränkt assoziativ*.

Man findet dann weiter aus der *ersten* dieser Gleichungen durch Anwendung des Kommutationsgesetzes (II)

$$a+b+c=(b+a)+c=b+a+c,$$

und ebenso aus der *zweiten* Gleichung:

$$a+b+c=a+(c+b)=a+c+b,$$

in Worten: Die Summe $a+b+c$ bleibt ungeändert, wenn man den *ersten* und *zweiten* oder den *zweiten* und *dritten* Summanden vertauscht. Wendet man die *zweite* dieser Operationen auf $b+a+c$ an, sodann die *erste* auf $a+c+b$, und auf das Resultat auch die *zweite*, so folgt schließlich:

(3) $$a+b+c\begin{cases}=b+a+c=b+c+a\\ =a+c+b=c+a+b=c+b+a.\end{cases}$$

---

erscheint bei seiner Übertragung auf *natürliche Zahlen* in der hier gegebenen Bedeutung ebenso wenig als ein *Axiom*, sondern lediglich als eine aus der *Definition* der Beziehungen:

$$(1)\quad b=a, \qquad (2)\quad c=a$$

resultierende *Folgerung*. Denn nach (1) darf man b durch a, sodann nach (2) a durch c *ersetzen*: somit erscheint schließlich c als *Ersatz* für b und man hat daher:

$$b=c.$$

Da es außer $a + b + c$ und $a + c + b$ keinen weiteren mit a *anfangenden*, aus a, b, c gebildeten Summenausdruck gibt, und da das Analoge bezüglich der mit b oder c beginnenden Ausdrücke gilt, so sind in (3) *alle* möglichen Ausdrücke dieser Art erschöpft. Und da andererseits, auf Grund des zuerst gefundenen Resultats jeder derselben unbeschränkt *assoziativ* ist, so folgt:

Die Summe $a + b + c$ ist unbeschränkt kommutativ und assoziativ.

6. Es handelt sich nun weiter darum, dieses Resultat auf „*beliebige*" Summen zu übertragen. Hier entsteht zunächst die Frage: Welcher Umfang kommt in diesem Zusammenhange dem Beiworte „*beliebig*" zu? In gewissem Sinne sind ja schon die zuletzt betrachteten Summen von der Form $a + b + c$ *beliebig*, insofern jeder der Summanden eine ganz *beliebige* natürliche Zahl sein kann. Allein diese auf die etwaige *Auswahl* der Summanden bezügliche Art von Willkürlichkeit kommt offenbar nicht mehr in Frage, da ja der oben für Summen von der Form $a + b + c$ geführte Beweis dieser Auswahl keinerlei Beschränkungen auferlegt. Dagegen erstreckt sich jener Beweis noch nicht auf Summen, wie sie durch Gl. (2) definiert sind, d. h. auf solche von der Form $a + b + c + d$, die also einen Summanden *mehr* enthalten, wie diejenigen von der Form $a + b + c$. Und da man dieses Hinzufügen eines weiteren Summanden beständig wiederholen kann, so folgt, daß man unter den zuvor schlechthin als *beliebig* bezeichneten Summen solche zu verstehen hat, die aus *beliebig vielen Summanden* zusammengesetzt sind. Das etwa vorhandene unterscheidende Merkmal solcher Summen besteht also in der verschiedenen „*Anzahl*" ihrer Summanden: es wird daher, um die nötige Klarheit zu gewinnen, vor allem erforderlich sein festzustellen, in welcher Beziehung dieser aus der Praxis jedermann geläufige und im Anschluß an die historische Entwicklung mit Vorliebe geradezu zur *Definition* der natürlichen Zahlen benützte Begriff zu *unserer* Definition der natürlichen Zahlen steht.

§ 3. Natürliche Zahlen als Anzahlbezeichnungen. — Addition einer beliebigen Anzahl natürlicher Zahlen.

1. Es sei $n > 1$ eine beliebige natürliche Zahl. Durch die *eine Zahl n* ist alsdann, wie in § 2 auseinandergesetzt wurde, die *gesamte Folge* der Zahlen $1, 2, \cdots, n$ völlig eindeutig bestimmt.

Es sei ferner eine Menge irgendwelcher „*Dinge*" gegeben. Welcher *Art* diese Dinge sind, kommt nicht weiter in Betracht. Wesentlich ist nur, daß jedes einzelne Ding von den übrigen *sichtlich getrennt* ist, daß ferner im Laufe der anzustellenden Betrachtungen niemals *mehrere* Dinge in ein *einziges* verschmelzen oder durch *Zerfallen* eines *einzelnen* ent-

stehen können. Jedes einzelne dieser Dinge soll im folgenden als ein *Element* der Menge bezeichnet werden. Dies vorausgeschickt, beweisen wir zunächst den folgenden Satz:

Wenn die sämtlichen Elemente einer Menge in irgendeiner willkürlich gewählten Reihenfolge den Zahlen 1, 2, $\cdots$, *n sich so zuordnen lassen, daß jedem Elemente eine dieser Zahlen entspricht und umgekehrt, so gestattet* j e d e *Reihenfolge der Elemente die gleiche Art der Zuordnung, sodaß also insbesondere immer* d i e - s e l b e *Zahl n als letzte hierbei zum Vorschein kommt.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, daß auch die Elemente der Menge aus den Zahlzeichen 1, 2, $\cdots$, n bestehen, daß also in der folgenden Betrachtung diese Zahlzeichen in *zweifacher* Eigenschaft auftreten: einmal, wie eben festgesetzt, als *Elemente* der vorgelegten Menge, das andere Mal als *Zahlen* (d. h. Stellenzeichen, Platznummern), denen jene Elemente zugeordnet werden. Es ist dann unmittelbar ersichtlich, daß

$$\left.\begin{array}{ll}\text{den Zahlen (Platznummern):} & 1, 2, 3, \cdots, n \\ \text{die Mengenelemente:} & 1, 2, 3, \cdots, n\end{array}\right\} \quad \text{(I)}$$

umkehrbar eindeutig entsprechen, wenn man auch den letzteren die für die natürlichen Zahlen geltende Reihenfolge gibt.

Die Herstellung einer beliebigen anderen gegenseitigen Zuordnung der beiden Gruppen von Zahlzeichen kann man sich dann zweckmäßig durch den folgenden Vorgang verdeutlichen. Man denke sich die in der zweiten Zeile von (I) angeschriebenen Mengenelemente zunächst entfernt, beliebig durcheinander gemischt und sodann wieder, mit dem ersten Platze beginnend und keinen Platz übergehend, auf die einzelnen Plätze verteilt (d. h. auf jeden Platz je ein Element). An die Stelle des Schemas (I) tritt alsdann eins von folgender Form:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Platznummern:} & 1, 2, 3, \cdots, n \\ \text{Mengenelemente:} & a, b, c, \cdots\cdots\end{array}\right\} \quad \text{(II)},$$

wenn wir mit $a, b, c, \cdots$ eine beliebige *Umordnung* oder, wie man zu sagen pflegt, *Permutation* der Elemente 1, 2, 3, $\cdots$, n bezeichnen.[1]) Wir haben dabei absichtlich der Folge der Elemente $a, b, c, \cdots$ *kein letztes* Glied gegeben, da wir zunächst noch garnicht einmal wissen, ob ein solches letztes Glied existiert, ebensowenig, falls es existiert, welche Platznummer ihm zukommt: wir wollen ja gerade erst *beweisen*, daß ein

1) Dabei sind also $a, b, c, \cdots$ nur *Aushilfszeichen* für die umgeordneten Zeichen 1, 2, 3, $\cdots$, n.

solches *letztes* Glied und zwar mit der Platznummer n vorhanden ist. Um dies zu erreichen, gehen wir zunächst darauf aus, die Folge der Elemente $a, b, c, \cdots$ durch passende Umstellung wieder in die ursprüngliche Anordnung zu bringen. Ist das *erste* Element a nur ein anderes Zeichen für 1, so ist für den Platz 1 das gewünschte Ziel schon erreicht. Wenn nicht, so muß das Element 1 an irgendeiner Stelle der Folge $b, c, \cdots$ erscheinen. Alsdann vertausche man dieses Element 1 mit dem Element a, sodaß also nunmehr das Element 1 den Platz 1 einnimmt, während der zuvor von dem Element 1 eingenommene Platz nunmehr mit dem Element a besetzt ist. Durch das gleiche Verfahren können wir jetzt das Element 2 (falls es nicht schon ohnehin den Platz 2 einnehmen sollte) an den Platz 2 bringen. So fortfahrend gelangt man schließlich dazu, auch jedem der übrigen Elemente $3, \cdots, n$ den mit der entsprechenden Nummer versehenen Platz zuzuteilen. Bei jeder der schließlich zu diesem Endresultat führenden Operationen wechseln immer nur irgendzwei Elemente der Permutationsfolge $a, b, c, \cdots$ ihre Plätze, es wird *niemals* ein von irgendeinem dieser Elemente besetzter Platz *leer*, *ebensowenig* wird irgendein anfänglich unbesetzter Platz *neu besetzt*. Somit nehmen schließlich die wieder in der Anordnung $1, 2, 3, \cdots, n$ erscheinenden Elemente *genau* dieselben Plätze ein, wie die mit $a, b, c, \cdots$ bezeichneten der permutierten Menge, und daraus folgt umgekehrt, daß diese letzteren *genau* die mit den Nummern $1, 2, 3, \cdots, n$ versehenen Plätze eingenommen haben müssen. Das Ergebnis dieser Betrachtung wollen wir ausdrücklich in den folgenden für die anschließenden Betrachtungen *fundamentalen Satz* zusammenfassen:

Die Elemente jeder Permutation der Zahlen $1, 2, 3, \cdots, n$ *lassen sich in der gegebenen Reihenfolge Glied für Glied den Zahlen* $1, 2, 3, \cdots, n$ *zuordnen.*

Jetzt sei eine Menge *beliebiger* Elemente gegeben und es werde angenommen, daß diese letzteren in irgendeiner speziellen Reihenfolge den Zahlen $1, 2, \cdots, n$ restlos zugeordnet werden können (sodaß also jedes Element mit einer bestimmten jener Zahlen und umgekehrt jede Zahl mit einem bestimmten Element *gepaart* erscheint). Man kann sich diese Zuordnung etwa in der Weise ausgeführt denken, daß jedes Element mit der ihm auf Grund der fraglichen Zuordnung zukommenden *Nummer* versehen wird. Durch diese Numerierung sind dann die Elemente in eine bestimmte Reihenfolge gebracht, es gibt ein $1^{\text{tes}}, 2^{\text{tes}}, \cdots, n^{\text{tes}}$ Element. Alle möglichen Zuordnungen der Zahlen $1, 2, \cdots, n$ zu den gegebenen Elementen können dann offenbar dadurch zustande gebracht werden, daß man den einzelnen Elementen in der oben bezeichneten Reihenfolge sukzessive alle möglichen *Permutationen* der Zahlen $1, 2, \cdots, n$ zuordnet.

Das läuft aber schließlich auf dasselbe hinaus, wie wenn man jede beliebige dieser Permutationen wieder den Zahlen $1, 2, \cdots, n$ zuzuordnen hat, und da dies, wie oben bewiesen, in jedem Falle ausführbar ist, so ergibt sich in der Tat schließlich die Richtigkeit der ausgesprochenen Behauptung, daß die Möglichkeit, die Elemente der Menge den Zahlen $1, 2, \cdots, n$ umkehrbar eindeutig zuzuordnen, für *jede* Anordnung der Elemente besteht, falls sie bei irgendeiner *speziellen* Anordnung vorhanden ist.

2. Auf Grund des eben gefundenen Ergebnisses können wir jetzt die folgende *Definition* einführen:

Definition I. *Lassen sich die Elemente einer Menge in irgendeiner Anordnung umkehrbar eindeutig den Zahlen* $1, 2, \cdots, n$ *zuordnen, so heißt* n, *also die letzte bei dieser Zuordnung verwendete Zahl, die Anzahl der Elemente.* Man sagt auch: der betreffenden *Menge* komme die *Anzahl* n zu oder sie besitze die *Anzahl* n oder sie *bestehe aus* n Elementen.

In diesem Zusammenhange wird auch ein *einzelnes* Element als *Menge* von der *Anzahl* 1 bezeichnet.

Daß die *Anzahl* einer Menge, der auf Grund der obigen Definition überhaupt eine solche zukommt, eine völlig *eindeutig bestimmte Zahl* ist, folgt aus der zuvor bewiesenen Tatsache, daß eine Menge, deren Elemente bei irgendeiner *speziellen* Anordnung den Zahlen $1, 2, \cdots, n$ umkehrbar eindeutig zugeordnet werden können, die gleiche Eigenschaft bei *jeder* Anordnung besitzt. Die *Anzahl* einer Menge der betrachteten Art ist also ein *Merkmal* oder *Kennzeichen*, welches der *Menge als solcher*, d. h. nur als *Zusammenfassung* von Elementen, ohne Rücksicht auf deren Anordnung zukommt.

Bei dem von uns befolgten Gange erscheinen also die natürlichen *Zahlen*, wie in § 1 des näheren auseinandergesetzt wurde, zunächst als bloße *Ordnungszeichen*, in welchem Zusammenhange man sie ja auch ausdrücklich als „*Ordinalzahlen*" zu bezeichnen pflegt, und erst eine bestimmte Art von *Anwendung* macht sie zu *Anzahlbezeichnungen*, also zu „*Kardinalzahlen*". Es dürfte kaum bestritten werden, daß dieser Gang mit demjenigen der historischen oder, wie man sogar sagen könnte, der natürlichen Entstehung des Zahlbegriffes nicht übereinstimmt. Denn sicherlich sind die *Zahlen* in der Weise *entstanden*, daß man anfing Dinge zu *zählen* und zur Unterscheidung *gezählter Mengen* von Dingen also als *Anzahlbezeichnungen* zunächst *Zahlwörter*, späterhin auch *Zahlzeichen* einzuführen. Aber noch weniger dürfte bestritten werden, daß diejenigen, welche solches taten, dabei nicht zugleich die Absicht verfolgten, die geeignete Grundlage für den logischen Aufbau einer allgemeinen Arithmetik zu schaffen. Für *uns* kann an dieser Stelle nur der letztere Ge-

sichtspunkt maßgebend sein: nicht was die Zahlen ursprünglich *gewesen*, sondern was sie *geworden* sind, darauf kommt es hier ausschließlich an. Und da wir es für ein wenig aussichtsreiches Unternehmen halten, auf der Grundlage des *Anzahl*begriffes zu einer befriedigenden Ausgestaltung der Lehre von den sogenannten *reellen Zahlen* zu gelangen (neuere, zum Teil äußerst verkünstelte Versuche dieser Art haben unsere Ansicht nur in vollstem Maße bestätigt!), andererseits aber der Begriff der *geordneten Folge* (oder „*Sukzession*") uns als durchaus zuverlässiges Fundament für die späterhin erforderliche *Erweiterung* unseres Zahlvorrats erschien, so hielten wir es für zweckmäßig, schon die *Definition* der *natürlichen Zahlen* von vornherein an diesen *letzteren* Begriff zu knüpfen, statt von der jedermann geläufigeren Bedeutung der natürlichen Zahlen als *Anzahl*bezeichnungen auszugehen. Die Möglichkeit, die von uns als *Ordinalzahlen* geschaffenen *natürlichen Zahlen* nach Bedarf auch als *Kardinalzahlen* anzuwenden, ergibt sich alsdann aus der oben als *Definition* I eingeführten Festsetzung, zu deren Ergänzung zunächst noch die folgenden Definitionen und daraus resultierenden Folgerungen dienen sollen.

3. Definition II. *Eine Menge heißt endlich, falls ihr eine bestimmte Anzahl zukommt.*

Definition III. *Zwei endliche Mengen heißen gleich, falls ihre Elemente in irgendeiner bestimmten Anordnung sich gegenseitig umkehrbar eindeutig zuordnen lassen.*

Man erkennt leicht, daß die Elemente zweier nach dieser Definition als *gleich* zu bezeichnenden Mengen in *jeder* beliebigen Anordnung sich gegenseitig umkehrbar eindeutig zuordnen lassen. Da nämlich die beiden Mengen ausdrücklich als *endlich* vorausgesetzt wurden, so kommt einer jeden eine bestimmte *Anzahl* zu. Wird die Anzahl der *einen* etwa mit n bezeichnet, so können zunächst deren Elemente in der bei der Definition angenommenen Reihenfolge den Zahlen $1, 2, \cdots, n$ zugeordnet werden, und das analoge gilt dann von den Elementen der *anderen*, da diese ja in der entsprechenden Reihenfolge den Elementen der *erstgenannten* zugeordnet werden können. Dann folgt aber wiederum aus unserem Permutationssatze, daß die Elemente *beider* Mengen den Zahlen $1, 2, \cdots, n$ und daher schließlich auch *gegenseitig* in *jeder* beliebigen Reihenfolge eindeutig umkehrbar zugeordnet werden können.

Aus der obigen Definition und den daran geknüpften Bemerkungen folgt dann ohne weiteres:

Gleiche Mengen besitzen dieselbe Anzahl und umgekehrt sind Mengen, welche dieselbe Anzahl besitzen, einander gleich.

Zwei Mengen, die einer dritten gleich sind, sind auch untereinander gleich.

Definition IV. *Eine endliche Menge, die nur Elemente einer anderen Menge, aber nicht alle*[1]) *enthält, heißt eine Teilmenge oder ein Teil jener letzteren.*

Definition V. *Von zwei ungleichen endlichen Mengen M und N heißt diejenige, z. B. M, die kleinere, welche einer Teilmenge der anderen, also von N, gleich ist. N heißt dann größer als M.*

Hierzu sei erläuternd bemerkt, daß das in dieser Definition ausschließlich als möglich angenommene Verhalten bei *ungleichen*, d. h. *nicht* der Definition III genügenden endlichen Mengen wirklich stets eintreten *muß*. Denn sind die betrachteten Mengen *ungleich*, so muß bei *jeder* gegenseitigen Zuordnung der Elemente eine der beiden Mengen mindestens *ein* überschüssiges Element aufweisen, sodaß die andere nur einer *Teilmenge* gleich sein kann. Daß dieser Überschuß bei *jeder* gegenseitigen Zuordnung immer bei *derselben* Menge auftreten muß und somit die Definition V einen von der speziellen Wahl der Zuordnung unabhängigen, eindeutig bestimmten Sinn besitzt, wird sich sogleich ergeben: vorläufig möge man annehmen, daß die Vergleichung der beiden Mengen auf Grund irgendeiner zufällig ausgewählten gegenseitigen Zuordnung erfolgt sei.

Aus der obigen Definition folgt nämlich zunächst:

Ist M die kleinere, N die größere von zwei endlichen Mengen und werden die zugehörigen Anzahlen mit m bzw. n bezeichnet, so hat man:

$$m < n, \quad n > m,$$

d. h. der kleineren Menge entspricht als Anzahl die frühere, der größeren die spätere Zahl und umgekehrt.

Denn da unter der Voraussetzung, daß N die größere der beiden Mengen ist, N, wie bereits erwähnt, außer der Teilmenge mit der Anzahl m mindestens *ein* überschüssiges Element enthalten muß, so folgt, daß $n \geqq m + 1$, also $n > m$. Umgekehrt würde, wenn m bzw. n die Anzahl der Menge M bzw. N bezeichnet, aus der Voraussetzung $n > m$ folgen, daß $n \geqq m + 1$, also N bei *jeder* gegenseitigen Zuordnung der Mengen M und N mindestens ein überschüssiges Element enthalten muß. Zugleich erkennt man auf diese Weise, daß die in der Definition V enthaltene Aussage von der Wahl der Zuordnung durchaus unabhängig ist. —

1) In der sogenannten *Mengenlehre* (die im wesentlichen von den *„unendlichen“* Mengen handelt) wird der Zusatz *„nicht alle“* häufig weggelassen, d. h. man betrachtet jede Menge in ihrer Gesamtheit auch als *Teilmenge* ihrer selbst und bezeichnet dann solche Teilmengen, welche *nicht alle* Elemente enthalten, ausdrücklich als *echte* Teilmengen.

Anknüpfend an die soeben festgestellte Bedeutung der *früheren* bzw. *späteren* Zahl als Anzahl der *kleineren* bzw. *größeren* Menge werden wir von jetzt ab die *frühere* bzw. *spätere* zweier Zahlen schlechthin als die *kleinere* bzw. *größere* bezeichnen, also zur sprachlichen Kennzeichnung der Beziehungen

$$m < n \quad \text{bzw.} \quad n > m$$

uns der *Redewendungen* bedienen:

m ist *kleiner* als n, bzw. n ist *größer* als m.

Und wir werden, wie schon in Nr. 1 der Einleitung angekündigt wurde, diese Ausdrucksweise nicht nur dann beibehalten, wenn eine unmittelbare *Umdeutung* von *Zahlen*beziehungen in *Anzahl-* oder *Maß*beziehungen *möglich* ist, sondern auch dann, wenn eine solche *ausgeschlossen* erscheint.

4. Im Anschlusse an die Verwendung der von uns lediglich als Ordnungszeichen eingeführten natürlichen Zahlen als Anzahlbezeichnungen beweisen wir noch den folgenden Satz, welcher den Zusammenhang unserer Definition der Addition mit der sonst zumeist üblichen, auf der Vereinigung der Elemente mehrerer Mengen beruhenden herstellt:

Bezeichnet man mit (M, N) *diejenige Menge, welche durch Vereinigung der (kein gemeinsames Element enthaltenden) endlichen Mengen* M *und* N *entsteht, mit* m *bzw.* n *deren respektive Anzahlen, so ist* $(m+n)$ *die Anzahl der Menge* (M, N).

Beweis. Man erkennt zunächst die Richtigkeit des obigen Satzes für den Fall, daß die Menge N aus einem einzigen Element E besteht. Denn ist m die Anzahl der Menge M, so ergibt sich ohne weiteres, daß die *ein* Element mehr enthaltende Menge (M, E) die auf m unmittelbar folgende Zahl $m+1$ zur Anzahl hat.

Die Allgemeingültigkeit des fraglichen Satzes ergibt sich sodann durch vollständige Induktion. Angenommen, es stehe bereits fest, daß für irgendeine bestimmte Menge N mit der Anzahl n die vereinigte Menge (M, N) die Anzahl $m+n$ besitze. Tritt jetzt an die Stelle der Menge N eine Menge N', die noch ein weiteres Element E enthält, sodaß also N' die Bedeutung von (N, E) hat, so läßt sich (M, N') herstellen, indem man zunächst (M, N) und daraus durch Hinzufügung des einen Elementes E die Menge $((M, N), E)$ bildet. Daraus folgt aber, da ja (M, N) die Anzahl $m+n$ besitzen sollte, daß (M, N') die Anzahl $(m+n)+1$ besitzen muß. Nun ist nach unserer Definition der Addition $(m+n)+1 = m+(n+1)$ (s. § 2, S. 9, Formel (B)), somit erkennt man, daß unser Satz für zwei Mengen mit den Anzahlen m, $(n+1)$ gilt, sobald seine Gültigkeit für solche mit den Anzahlen m, n feststeht. Da dies aber für *beliebiges* m und für $n = 1$ bereits der Fall ist, so ist damit die Allgemeingültigkeit des Satzes erwiesen.

5. Die Zuordnung einer endlichen Menge von Elementen zu der Folge der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \cdots$ liefert ein zweckmäßiges Mittel, um *Reihenfolge* und *Anzahl* der Elemente durch die Bezeichnung kenntlich zu machen. Bezeichnet man die Elemente der Menge generell mit irgendeinem bestimmten Buchstaben, etwa wie oben mit E, und mit n ihre Anzahl, so pflegt man eine solche Menge in der Form anzuschreiben:

$$E_1, E_2, E_3, \cdots, E_n,$$

wobei also durch die „*Stellenzeiger*" oder „*Indizes*" $1, 2, 3, \cdots, n$ eine bestimmte *Reihenfolge* der Elemente, durch deren *letzten:* n zugleich die *Anzahl* der Elemente gekennzeichnet wird. Will man dieselbe Menge von Elementen in einer *anderen* Reihenfolge anschreiben, so kann man das offenbar dadurch erzielen, daß man die Indizes $1, 2, 3, \cdots, n$ durch eine *Permutation* dieser Zahlen ersetzt. Bezeichnet man eine solche etwa durch die Buchstaben:

$$k_1, k_2, k_3, \cdots, k_n,$$

so wird durch

$$E_{k_1}, E_{k_2}, E_{k_3}, \cdots, E_{k_n}$$

die *entsprechende Permutation* der Elementenfolge $E_1, E_2, E_3, \cdots, E_n$ dargestellt.

Zuweilen bedient man sich, um die etwas schwerfälligen Doppelindizes $k_1, k_2, \cdots, k_n$ zu vermeiden, der etwas bequemeren, aber weniger charakteristischen Schreibweise:

$$E_1', E_2', E_3', \cdots, E_n',$$

wobei dann die veränderte Bezeichnung des *Trägers* der Indizes, nämlich E' statt E, die Veränderung der *Reihenfolge* der Elemente andeuten soll.

6. Es handelt sich jetzt noch darum, die Benutzung der natürlichen Zahlen als *Anzahl*zeichen für denjenigen Zweck zu verwerten, welcher uns veranlaßt hatte, die vorstehenden, im wesentlichen erst für die *Anwendungen* der Zahlen maßgebenden Betrachtungen schon an dieser Stelle einzuschalten, nämlich für den Beweis des Satzes über den unbeschränkt *kommutativen* und *assoziativen* Charakter einer Summe *beliebig vieler* natürlicher Zahlen. Die Richtigkeit dieses Satzes steht nach § 2, Nr. 5 bereits fest für jede Summe von der Form $a + b + c$, also, wie wir jetzt sagen können, für jede aus drei natürlichen Zahlen gebildete Summe.

Angenommen nun, der Satz gelte für jede Summe, die aus höchstens n natürlichen Zahlen besteht, sodaß also, wenn man diese letzteren jetzt mit $a_1, a_2, a_3, \cdots$ bezeichnet und

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m, \quad m \leqq n$$

setzt, s_m bei jeder Wahl der Zahlen $a_1, a_2, \cdots, a_m$ unbeschränkt *kommutativ* und *assoziativ* sein soll. Bedeutet wieder die Buchstabenfolge

$k_1, k_2, \cdots, k_n$ eine beliebige Permutation der Zahlen $1, 2, \cdots, n$, so hat man insbesondere:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= a_{k_1} + a_{k_2} + \cdots + a_{k_n} \end{aligned}$$

und, wenn jetzt $m < n$ angenommen wird, auch:

$$s_n = (a_{k_1} + \cdots + a_{k_m}) + (a_{k_{m+1}} + \cdots + a_{k_n}) \tag{1}$$

(wobei im Falle $m = 1$ bzw. $m + 1 = n$ die erste bzw. zweite Summe der rechten Seite sich auf ein einziges Glied reduziert). Bezeichnet man ferner mit s_{n+1} eine Summe, die aus s_n durch Hinzufügung eines weiteren Summanden a_{n+1} entsteht, so hat man nach dem Vorbilde der Definitionen (1), (2) von § 2, S. 14 zunächst:

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$$

und daher nach Gl. (1) mit Benutzung des assoziativen Verhaltens einer Summe von drei Summanden auch:

$$s_{n+1} = (a_{k_1} + \cdots + a_{k_m}) + (a_{k_{m+1}} + \cdots + a_{k_n}) + a_{n+1}. \tag{2}$$

Da die eingeklammerten Summen eindeutig bestimmte natürliche Zahlen vorstellen, so findet man mit Hilfe des für dreigliedrige Summen bereits bewiesenen Kommutations- und Assoziationsgesetzes:

$$s_{n+1} \begin{cases} = (a_{k_1} + \cdots + a_{k_m}) + (a_{k_{m+1}} + \cdots + a_{k_n} + a_{n+1}) \\ = (a_{n+1} + a_{k_1} + \cdots + a_{k_m}) + (a_{k_{m+1}} + \cdots + a_{k_n}) \end{cases} \tag{3}$$

Keine der rechts auftretenden Summen kann mehr als n Summanden enthalten, sie sind also infolge der gemachten Annahme sämtlich *kommutativ*. Infolgedessen kann man dem neu hinzugetretenen Summanden a_{n+1} innerhalb der Teilsumme, welche ihn enthält, und das heißt schließlich *überhaupt* jeden beliebigen Platz anweisen und da andererseits a_{k_1}, $a_{k_2}, \cdots, a_{k_n}$ schon jede beliebige Permutation von $a_1, a_2, \cdots, a_n$ vorstellen kann, so folgt, daß die Summe s_{n+1} *unbeschränkt kommutativ* ist.

Jede der in (3) auftretenden Teilsummen ist aber auf Grund der Voraussetzung auch *assoziativ*. Und da außerdem auch die Wahl von m, also die Wahl derjenigen Assoziation, welche der Bildung jener Teilsummen zugrunde liegt, ganz beliebig ist, so folgt, daß die Summe s_{n+1} auch *unbeschränkt assoziativ* ist.

Nachdem nun aber die in Frage stehenden Eigenschaften für *zwei*- und *drei*gliedrige Summen[1]) erwiesen sind, so ergibt sich nunmehr durch

1) Bei *zwei*gliedrigen Summen kann natürlich nur von *Kommutation*, nicht aber von *Assoziation* die Rede sein.

vollständige Induktion, daß sie auch jeder Summe von *beliebig vielen* natürlichen Zahlen zukommen.

Es besteht somit der folgende Satz:

Die Summe beliebig vieler natürlicher Zahlen ist unbeschränkt kommutativ und assoziativ, sie ist also eine von der Anordnung der Summanden und der sukzessive ausgeführten Einzelsummationen unabhängige, eindeutig bestimmte und in der Reihe der natürlichen Zahlen allemal vorhandene Zahl.

Hieraus folgt noch, daß der in Nr. 4 bewiesene Satz über die *Anzahl* einer durch Vereinigung *zweier* Mengen entstandenen Menge sich ebenfalls durch vollständige Induktion auf den Fall *beliebig vieler* Mengen übertragen läßt, d. h. es gilt der Satz:

Bezeichnet man mit $m_1, m_2, \cdots, m_n$ die respektiven zu den Mengen $M_1, M_2, \cdots, M_n$ gehörigen Anzahlen, so besitzt die vereinigte Menge $(M_1, M_2, \cdots, M_n)$ die Anzahl $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$.

Im übrigen sei noch ausdrücklich hervorgehoben, daß unsere *Definition* der *Addition* und die Herleitung aller daraus resultierenden Folgerungen ausschließlich auf der ursprünglichen Bedeutung unserer natürlichen Zahlen als *Ordnungszeichen* beruhte. Nur für die Ausdehnung des Satzes über die *eindeutige Bestimmtheit* einer Summe auf *beliebige* Summen, und das heißt in Wahrheit auf Summen einer beliebigen *Anzahl* von Summanden konnte selbstverständlich der *Anzahlbegriff* nicht entbehrt werden. Analoge Verhältnisse werden sich bei der jetzt einzuführenden Rechnungsoperation der Multiplikation ergeben.

§ 4. Multiplikation natürlicher Zahlen.

1. Wir definieren eine zweite *Rechnungsoperation*, die *Multiplikation* durch die *Anfangsgleichung:*

(A) $$a \cdot 1 = a$$

und die *Rekursionsformel:*

(B) $$\left.\begin{aligned} a \cdot (n+1) &= a \cdot n + a \cdot 1\,[1] \\ &= a \cdot n + a \end{aligned}\right\} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Aus der letzteren gewinnt man für $n = 1$ zunächst eine bestimmte *Zahl* als gleichbedeutend mit $a \cdot 2$, sodann, indem man $n = 2$ setzt, entsprechend für $a \cdot 3$ usf., sodaß also schließlich als Äquivalent für das Symbol $a \cdot b$

1) Prägnanter geschrieben:

$$(a \cdot n) + (a \cdot 1).$$

Man pflegt aber die Klammern gewöhnlich wegzulassen.

eine *eindeutig bestimmte, in der Zahlenreihe allemal vorhandene Zahl* sich ergibt.[1]) Wir können darnach das Symbol $a \cdot b$ geradezu wieder als eine *bestimmte Zahl* ansehen, welche wir als das *Produkt* der beiden *Faktoren* a und b bezeichnen.[2]) Diese letzteren, nämlich der „*Multiplikandus*" a und der „*Multiplikator*" b erscheinen bei dieser Definition zunächst wiederum *keineswegs* als *gleichberechtigt*. Um ihre Vertauschbarkeit und gewisse weitere Haupteigenschaften der Multiplikation herzuleiten, zeigen wir zunächst, daß zugleich mit den Relationen (A), (B) stets auch die folgenden, durch *Kommutation* daraus hervorgehenden bestehen:

(A′) $$1 \cdot a = a,$$

(B′) $$(n+1) \cdot a = n \cdot a + 1 \cdot a = n \cdot a + a.$$

Beweis zu (A′). Die Gl. (A′) gilt offenbar für $a = 1$, da sie für diesen Fall mit Gl. (A) zusammenfällt. Bedeutet dann wiederum $a = a'$ *irgendeine spezielle* Zahl, für welche Gl. (A′) als erwiesen gilt, also:

$$1 \cdot a' = a',$$

so folgt aus Gl. (B), wenn man daselbst $a = 1$, $n = a'$ setzt:

$$1 \cdot (a' + 1) = 1 \cdot a' + 1, \quad \text{d. h.} \quad = a' + 1.$$

Die Gl. (A′) gilt also wiederum für $a = a' + 1$, falls sie für $a = a'$ richtig ist, und sie gilt somit allgemein, da ihre Richtigkeit für $a = 1$ feststeht.

Beweis zu (B′). Setzt man in (A): $a = n + 1$, so folgt:

$$(n+1) \cdot 1 = n + 1$$

oder (da nach (A): $n = n \cdot 1$) auch:

$$(n+1) \cdot 1 = n \cdot 1 + 1,$$

---

1) Um auf Grund der obigen Definition zu *beweisen*, daß

$$2 \cdot 2 = 4,$$

hätte man folgende Schritte zu machen:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2 &= 2 \cdot (1 + 1) && \text{(S. 9, Gl. (A))} \\ &= 2 \cdot 1 + 2 && \text{(Def.-Gl. (B))} \\ &= 2 + 2 && \text{(Def.-Gl. (A))} \\ &= 2 + (1 + 1) && \text{(S. 9, Gl. (A))} \\ &= (2 + 1) + 1 && \text{(S. 10, Gl. (I))} \\ &= 3 + 1 \\ &= 4 && \text{(S. 9, Gl. (A))} \end{aligned}$$

2) Wo kein Mißverständnis möglich ist, wird das *Operationszeichen* (der *Punkt*) hier häufig ganz weggelassen, sodaß man ab, $a(b+1)$ usw. statt: $a \cdot b$, $a \cdot (b+1)$ usw. schreibt.

d. h. die Gl. (B') gilt zunächst für $a = 1$. Sei nun wieder $a = a'$ *irgendeine spezielle* Zahl, für welche Gl. (B') richtig ist, sodaß also:

$$(n+1) \cdot a' = n \cdot a' + a'.$$

Aus Gl. (B) folgt sodann, wenn man a durch $n+1$, n durch a' ersetzt:

$$(n+1) \cdot (a'+1) = (n+1) \cdot a' + (n+1)$$

und daher mit Benützung der eben gemachten Annahme:

$$(n+1) \cdot (a'+1) = (n \cdot a' + a') + (n+1) = n \cdot a' + a' + n + 1.$$

Wendet man auf die rechte Seite das erweiterte Kommutations- und Assoziationsgesetz (§ 3, Nr. 6) an, so ergibt sich:

$$(n+1) \cdot (a'+1) = (n \cdot a' + n) + (a'+1).$$

Da aber nach Gl. (B), wenn man daselbst a durch n, n durch a' ersetzt:

$$n \cdot (a'+1) = n \cdot a' + n,$$

so findet man schließlich:

$$(n+1) \cdot (a'+1) = n \cdot (a'+1) + (a'+1),$$

d. h. Gl. (B') gilt dann auch für $a = a' + 1$ und somit wieder für *jedes* a, da sie für $a = 1$ richtig ist.

2. Nunmehr sind wir auch imstande, die vollständige *Gleichberechtigung* der beiden Faktoren a, b zu erweisen:

Lehrsatz I. *Die Multiplikation ist kommutativ, d. h. man hat:*

(I) $$a \cdot b = b \cdot a.$$

Beweis. Durch Kombination der Gleichungen (A) und (A') ergibt sich:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a$$

d. h. Gl. (I) gilt zunächst bei *beliebigem* a für die *spezielle* Zahl $b = 1$.

Angenommen, sie gelte wiederum für *irgendeine spezielle* Zahl $b = b'$, sodaß also:

$$a \cdot b' = b' \cdot a.$$

Aus Gl. (B) folgt sodann:

$$a \cdot (b'+1) = a \cdot b' + a,$$

also mit Benutzung der eben gemachten Annahme:

$$a \cdot (b'+1) = b' \cdot a + a.$$

Da aber aus Gl. (B') für $n = b'$ folgt:

$$(b'+1) \cdot a = b' \cdot a + a,$$

so wird:

$$a \cdot (b'+1) = (b'+1) \cdot a,$$

d. h. Gl. (I) gilt dann auch für $b = b' + 1$ und somit wieder für *jedes* b, da sie für $b = 1$ richtig ist.

3. Für die Multiplikation bestehen noch zwei weitere Fundamentalgleichungen, deren *erste* (das „*Distributionsgesetz*") eine direkte Verallgemeinerung der Grundformel (B) bzw. (B') darstellt, während die *zweite* das ganz analog wie bei der *Addition* formulierte *Assoziationsgesetz* enthält:

Lehrsatz II. *Die Multiplikation ist distributiv, d. h. man hat:*

(II) $$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

(II') $$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a.$$

Beweis. Man hat zunächst nach Formel (B) für $n = b$

$$a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a \cdot 1,$$

d. h. Gl. (II) gilt bei *beliebigem* a und b für die *spezielle* Zahl $c = 1$.

Es werde nun wieder das analoge für *irgendeine* spezielle Zahl $c = c'$ angenommen, sodaß also:

$$a \cdot (b + c') = a \cdot b + a \cdot c' \quad \text{(bei } \textit{beliebigem } a \text{ und } b\text{).}$$

Man hat sodann:

$$\begin{aligned} a \cdot (b + (c' + 1)) &= a \cdot ((b + c') + 1) \\ &= a \cdot (b + c') + a \quad \text{(nach Formel (B))}, \end{aligned}$$

und daher infolge der gemachten Annahme:

$$\begin{aligned} a \cdot (b + (c' + 1)) &= a \cdot b + a \cdot c' + a \\ &= a \cdot b + a \cdot (c' + 1) \quad \text{(nach Formel (B))}, \end{aligned}$$

d. h. Gl. (II) gilt auch noch für $c = c' + 1$, falls ihre Geltung für $c = c'$ besteht. Sie gilt somit für *jedes* c, da ihre Richtigkeit für $c = 1$ bereits feststeht.

Um auch Gl. (II') zu erweisen, hat man:

$$\begin{aligned} (b + c) \cdot a &= a \cdot (b + c) && \text{(nach (I))} \\ &= a \cdot b + a \cdot c && \text{(nach (II))} \\ &= b \cdot a + c \cdot a && \text{(nach (I)).} \end{aligned}$$

Zusatz. Durch Kombination der Formeln (II) und (II') ergibt sich die Regel für die Ausführung der *Multiplikation zweier Summen*. Man findet:

(II'') $$\begin{cases} (a + b) \cdot (a' + b') = (a + b) \cdot a' + (a + b) \cdot b' & \text{(nach (II))} \\ \qquad = a \cdot a' + b \cdot a' + a \cdot b' + b \cdot b' & \text{(nach (II')).} \end{cases}$$

Die Regeln (II), (II'), (II'') lassen sich auch ohne weiteres auf Summen beliebig vieler Summanden ausdehnen. Man findet z. B.

$$\begin{aligned} a \cdot (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) &= a \cdot b_1 + a \cdot (b_2 + \cdots + b_n) \\ &= a \cdot b_1 + a \cdot b_2 + a \cdot (b_3 + \cdots + b_n) \\ &= \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &= a \cdot b_1 + a \cdot b_2 + \cdots + a \cdot b_n \end{aligned}$$

usf. Aus der letzten Formel ergibt sich, wenn man jede der Zahlen $b_1, b_2, \cdots, b_n$ durch 1 ersetzt:

$$a \cdot n = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ mal}},$$

d. h. das *Produkt* $a \cdot n$ fällt zusammen mit der Summe von n gleichen Summanden a und könnte geradezu durch diese Eigenschaft *definiert* werden, falls man bei der Definition den Begriff der *Anzahl* nicht zu vermeiden wünscht. In dem vorliegenden Zusammenhange erscheint die obige Beziehung als eine unmittelbare *Folgerung* aus dem *distributiven* Charakter der Multiplikation, d. h. schließlich aus der definierenden Rekursionsformel (B), aus welcher sie offenbar auch ganz direkt abgeleitet werden kann.

4. Lehrsatz III. *Die Multiplikation ist assoziativ, d. h. man hat:*

(III) $$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Beweis. Aus Formel (A) findet man:

$$(a \cdot b) \cdot 1 = a \cdot b \quad \text{und auch:} \quad a \cdot (b \cdot 1) = a \cdot b,$$

also:

$$(a \cdot b) \cdot 1 = a \cdot (b \cdot 1),$$

d. h. die Gl. (III) gilt zunächst bei *beliebigem* a und b für die *spezielle* Zahl $c = 1$.

Es werde nun wieder angenommen, Gl. (III) gelte bei *beliebigem* a und b für *irgendeine* spezielle Zahl $c = c'$, sodaß also:

$$(a \cdot b) \cdot c' = a \cdot (b \cdot c').$$

Aus (B) folgt sodann, wenn man a durch $(a \cdot b)$, n durch c' ersetzt:

$$(a \cdot b) \cdot (c' + 1) = (a \cdot b) \cdot c' + a \cdot b,$$

also mit Benützung der eben gemachten Annahme:

$$(a \cdot b) \cdot (c' + 1) = a \cdot (b \cdot c') + a \cdot b.$$

Wendet man auf die rechte Seite dieser Gleichung das (rückwärts gelesene) Distributionsgesetz (II) an, so ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} (a \cdot b) \cdot (c' + 1) &= a \cdot (b \cdot c' + b) \\ &= a \cdot (b \cdot (c' + 1)), \end{aligned}$$

d. h. Gl. (III) gilt wiederum auch noch für $c = c' + 1$ und somit für *jedes* c, da sie für $c = 1$ als richtig erkannt wurde

5. Neben den fundamentalen *Gleichungen* (I)—(III) bestehen für die *Multiplikation* natürlicher Zahlen noch die folgenden charakteristischen *Ungleichungen:*

(IV) $a \cdot b > a$, wenn: $b > 1$.

(V) $a \cdot b > a' \cdot b$, wenn: $a > a'$.

Die Richtigkeit von (IV) erkennt man zunächst unmittelbar für $b = 2$, wegen:

$$a \cdot 2 = a \cdot (1 + 1) = a + a > a \quad \text{(nach § 2, Ungl. (III))},$$

und sodann, wegen:

$$a \cdot (b' + 1) = a \cdot b' + a > a \cdot b',$$

durch vollständige Induktion für *jedes* $b > 1$.

Die Richtigkeit von (V) steht zunächst fest für $b = 1$ und ergibt sich sodann wieder durch vollständige Induktion für jedes beliebige b. Denn aus:

$$a \cdot b' > a' \cdot b'$$

folgt nach § 2, Ungl. (VII):

$$a \cdot b' + a > a' \cdot b' + a', \quad \text{d. h.} \quad a \cdot (b' + 1) > a' \cdot (b' + 1).$$

Da neben der Beziehung (V) offenbar auch die folgenden bestehen:

(VI) $a \cdot b < a' \cdot b$, wenn: $a < a'$,

(VII) $a \cdot b = a' \cdot b$, wenn: $a = a'$,

so erkennt man wiederum, daß dieselben insgesamt auch *umkehrbar* sind, d. h. aus:

(Va) $a \cdot b > a' \cdot b$ folgt allemal, daß: $a > a'$,

(VIa) $a \cdot b < a' \cdot b$ „ „ „ $a < a'$,

(VIIa) $a \cdot b = a' \cdot b$ „ „ „ $a = a'$.

Endlich ergibt sich wegen der Kommutativität der Multiplikation, daß nach Analogie von (V) auch:

(VIII) $a \cdot b > a \cdot b'$, wenn: $b > b'$,

und sodann durch kombinierte Anwendung von (V), (VII), (VIII), daß:

(IX) $a \cdot b > a' \cdot b'$, wenn: $a \geqq a'$, $b > b'$,
oder: $a > a'$, $b \geqq b'$.

6. Durch *sukzessive fortschreitende Multiplikation* können wir den Begriff des *Produktes* auf *beliebig viele* Faktoren übertragen. Wir *definieren* also zunächst das Produkt $a \cdot b \cdot c$ durch die Formel:

(1) $$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c$$

und, nachdem auf diese Weise die Bedeutung der Zeichenverbindung $a \cdot b \cdot c$ als einer eindeutig bestimmten *Zahl* feststeht, analog:

(2) $$a \cdot b \cdot c \cdot d = (a \cdot b \cdot c) \cdot d,$$

schließlich allgemein:

(3) $$a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \cdot a_{n+1} = (a_1 \cdot a_2 \cdots a_n) \cdot a_{n+1}.$$

Alsdann läßt sich aber *wörtlich und buchstäblich so*, wie es in Nr. 6 des vorigen Paragraphen für die *Addition* gezeigt wurde, sofern man nur das dort auftretende *Pluszeichen* allemal durch den *Punkt* ersetzt, folgendes nachweisen:

Das Produkt beliebig vieler natürlicher Zahlen ist unbeschränkt kommutativ und assoziativ. Dasselbe stellt also eine von der Anordnung der Faktoren und der einzelnen, sukzessive auszuführenden Multiplikationen unabhängige, eindeutig bestimmte und in der Zahlenreihe allemal vorhandene Zahl dar.

§ 5. Die umgekehrten Rechnungsoperationen: Subtraktion und Division im Gebiete der natürlichen Zahlen.

1. Sind a und b zwei beliebig gegebene natürliche Zahlen und bezeichnet man generell mit x eine *vorläufig unbekannte* Zahl, so ergibt sich aus den bisherigen Betrachtungen, daß stets *eine* und *nur* eine natürliche Zahl x existiert, derart, daß:

(1) $$x = a + b$$

bzw.

(2) $$x = ab.$$

Die *Addition* bzw. *Multiplikation* zweier natürlicher Zahlen ist also im Gebiete der natürlichen Zahlen *stets* und zwar mit *eindeutigem* Ergebnisse *ausführbar*. Ein Bedürfnis, unseren Zahlenvorrat zu *erweitern*, wird sich indessen alsbald ergeben, wenn wir nunmehr versuchen werden, jene beiden Rechnungsoperationen „*umzukehren*". D. h. statt, wie bisher, die beiden *Summanden* bzw. *Faktoren* als die ursprünglich *gegebenen*, dagegen deren *Summe* bzw. *Produkt* als die daraus *abzuleitenden* Zahlen anzusehen, wollen wir jetzt annehmen, es sei die *Summe* bzw. das *Produkt* zweier Zahlen und *einer* der *Summanden* bzw. *Faktoren* gegeben und es handle sich um die Bestimmung des noch *fehlenden Summanden* bzw. *Faktors*. Dabei ist es infolge des *kommutativen* Charakters der Addition und Multiplikation offenbar gleichgültig, *welchen* der beiden Summanden bzw. Faktoren wir als *gegeben* ansehen. Wir wollen, um eine Wahl zu treffen, die fragliche Aufgabe in der Form anschreiben:

$$a + x = b \quad \text{bzw.} \quad ax = b,$$

d. h. es wird die Bestimmung einer Zahl x verlangt, welche zu der gegebenen Zahl a addiert, bzw. mit ihr multipliziert die gegebene Zahl b liefert.

2. Die *erste* dieser Aufgaben, also

(3) $$a + x = b,$$

erscheint von vornherein im Gebiete der natürlichen Zahlen unlösbar, falls $b \leqq a$ vorgelegt sein sollte. Denn für *jede* natürliche Zahl x hat man:

$$a + x > a.$$

Ist dagegen $b > a$, so besitzt die Gleichung stets eine und nur eine bestimmte Lösung. Bildet man nämlich die Reihe der Zahlen

$$a \quad a + 1 \cdots a + b,$$

so muß, wegen $a < b < a + b$, die Zahl b in dieser Reihe *einmal* und *nur* einmal vorkommen, und es gibt somit *eine* und *nur* eine Zahl $d < b$ von der Beschaffenheit, daß:

(4) $$a + d = b,$$

anders ausgesprochen, die Gl. (3) hat die *Lösung* $x = d$ und zwar nur diese *eine* (da ja nach dem oben gesagten nur *ein* $d < b$ existiert und die Möglichkeit $d \geqq b$ von vornherein ausgeschlossen erscheint). Die *Rechnungsoperation*, welche in der Bestimmung jener Zahl d aus den beiden gegebenen Zahlen a und b besteht, wird als *Subtraktion* der Zahl a (des „*Subtrahendus*") von der Zahl b (dem „*Minuendus*"), das *Resultat* d dieser Operation als *Differenz* b *minus* a bezeichnet. Zugleich bedient man sich, um der in Gl. (4) enthaltenen Beziehung der Zahl d zu den als ursprünglich ausschließlich *gegeben* anzusehenden Zahlen a, b einen prägnanteren Ausdruck zu verleihen, der neuen Schreibweise:

(5) $$d = b - a\text{[1]},$$

sodaß also das Symbol $b - a$ (wofür wir nach Bedarf[2]) auch $(b - a)$ schreiben) eine in der Zahlenreihe *wirklich vorhandene* Zahl bezeichnet, welche nach Gl. (4) der Bedingung genügt:

(6) $$a + (b - a) = b \quad \text{(oder auch: } (b - a) + a = b).\text{[3]}$$

Und die *Existenz* einer solchen Zahl $b - a$ hing ausschließlich von der Voraussetzung $b > a$ ab.[4])

---

1) In Worten: *b minus a*. Das die beiden Zahlen b und a verbindende Operationszeichen (der horizontale Strich) heißt *Minuszeichen*.

2) Vgl. § 2, Nr. 1 (S. 9).

3) Es ist also stets
$$b - a < b.$$

4) Es wird sich später als zweckmäßig erweisen, die bisherigen Rechnungs-

3. Wir behandeln nun in analoger Weise die *zweite* der am Schlusse von Nr. 1 bezeichneten Aufgaben:

(7) $$ax = b,$$

d. h. die Forderung, eine (natürliche) Zahl x zu bestimmen, welche mit der gegebenen Zahl a multipliziert die gegebene Zahl b liefert.

Man erkennt ohne weiteres, daß die Aufgabe im Gebiete der natürlichen Zahlen *keine* Lösung zuläßt, falls $b < a$, da ja in diesem Falle

$$a \cdot 1 = a > b,$$
$$a \cdot x > a > b \quad \text{für jedes } x > 1.$$

In dem Spezialfalle $b = a$ ergibt sich sodann unmittelbar:

(8) $$a \cdot 1 = b \quad (\text{also: } x = 1).$$

Ist schließlich $b > a$, so bilde man die Reihe der Zahlen

(9) $$a \cdot 1, \; a \cdot 2, \; \cdots \; a \cdot b.$$

Nur wenn $a = 1$, hat man:

(10) $$a \cdot b = b \quad (\text{also: } x = b).$$

In jedem anderen Falle (d. h. wenn $a \geqq 2$) ist $a \cdot b > b$ und somit:

$$a \cdot 1 < b < a \cdot b.$$

Da hiernach b in der *vollständigen* Reihe der Zahlen von $a \cdot 1$ bis $a \cdot b$ sicher vorkommt, so ergibt die Vergleichung der Zahl b mit den Zahlen der *Teilreihe* (9) nur die folgenden zwei Möglichkeiten: *entweder* findet sich in dieser Teilreihe eine Zahl vor, die mit b zusammenfällt, etwa:

(11a) $$aq = b, \quad \text{wo: } 1 < q < b.$$

Oder b liegt zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden Zahlen der Reihe (9), also:

(11b) $$aq < b < a(q+1), \quad \text{wo: } 1 \leqq q < b.$$

Im *ersten* Falle und *nur* in diesem existiert also, geradeso wie in den durch Gl. (8) und (10) charakterisierten Spezialfällen $a = b$ und $a = 1$, eine bestimmte Zahl $x = q$, welche der durch Gl. (7) bezeichneten For-

regeln auf Zahlen zu übertragen, die in der Form von *Differenzen* gegeben sind. *Hier* soll in Hinsicht auf eine demnächst zu machende Anwendung nur angemerkt werden, daß eine solche Differenz $b - a$ (wo $b > a$) gerade so gut dem distributiven Gesetze der Multiplikation unterliegt, wie eine Summe. Aus

$$(b - a) + a = b$$

folgt nämlich durch Multiplikation mit c:

$$c(b - a) + ca = cb,$$

also, wegen $cb > ca$:

$$cb - ca = c(b - a).$$

derung genügt. Fassen wir diesen Fall mit den genannten Spezialfällen zusammen, so hat man also:

(12) $$aq = b, \quad \text{wo jetzt:} \quad 1 \leqq q \leqq b,$$

und man bezeichnet sodann q als das Resultat der *Division* des *Dividendus* b durch den *Divisor* a, kürzer als den *Quotienten* von b durch a. Um die betreffende Abhängigkeit der Zahl q von den Zahlen a und b als den *ursprünglich gegebenen* prägnanter zum Ausdruck zu bringen, bedient man sich an Stelle der Schreibweise (12) der folgenden:

(13) $$q = \frac{b}{a}$$

$\left(\text{wo insbesondere: } 1 = \frac{b}{b},\ b = \frac{b}{1}\right)$ und sagt, b sei durch a *teilbar* oder auch a sei ein *Teiler* von b. Umgekehrt bezeichnet man (jedoch mit Ausschluß des Falles $q = 1$, also $a = b$) im Anschlusse an die Gleichungsform (12) b als ein *Vielfaches* von a.

Andererseits besteht dann infolge der Vertauschbarkeit von a und q in Gl. (12) neben Gl. (13) auch die folgende:

(14) $$a = \frac{b}{q},$$

d. h. q ist gleichfalls ein Teiler von b, und umgekehrt ist b ein *Vielfaches* von q (jetzt mit Ausschluß des Falles $a = 1$, also $q = b$).

§ 6. Sätze über Teilbarkeit von Zahlen. — Absolute und relative Primzahlen. — Euklidischer Algorithmus.[1]

1. Ist
$$b = aq, \quad c = br,$$
so folgt:
$$c = a(qr),$$
d. h.

Ist c ein Vielfaches von b, b ein Vielfaches von a, so ist auch c ein Vielfaches von a.

Anders ausgesprochen:

Jeder Teiler a eines Teilers b von c ist gleichfalls ein Teiler von c.

Hat man ferner:
$$b = aq, \quad c = ar,$$
so folgt:
$$b + c = a(q + r)$$

1) Dieser Paragraph enthält einige Hilfssätze aus der sogenannten „elementaren Zahlentheorie". Wir beschränken uns dabei auf die Mitteilung derjenigen Sätze, deren Kenntnis für die späteren Entwicklungen notwendig ist.

und, falls $b > c$:

$$b - c = aq - ar = a(q-r)\ [1]$$

d. h.

Sind zwei Zahlen b und c Vielfache einer dritten Zahl a, so gilt das gleiche von ihrer Summe und Differenz.[2]

Oder auch:

Jeder gemeinsame Teiler zweier Zahlen ist auch ein Teiler ihrer Summe und Differenz.

Dagegen braucht offenbar weder b noch c durch a teilbar zu sein, wenn $b + c$ *oder* $b - c$ den Teiler a hat. Selbst wenn $b + c$ *und* $b - c$ den Teiler a haben, so würde daraus nur folgen, daß $2b$ und $2c$ durch a teilbar sind. Steht jedoch fest, daß außer $b + c$ *oder* $b - c$ noch *eine* der beiden Zahlen b, c den Teiler a hat, so gilt dies auch von der anderen.

Wegen $b = b \cdot 1$ hat jede Zahl *sich selbst* und die 1 zu Teilern. Eine Zahl b, welche keine anderen Teiler hat, als *diese beiden*, heißt (absolute) *Primzahl*. Die Zahl 1, für welche jene *beiden* Teiler in einen einzigen zusammenfallen, nimmt eine Sonderstellung ein und wird *nicht* zu den Primzahlen gerechnet. Die einzige *gerade* (d. h. durch 2 teilbare) *Primzahl* ist offenbar die Zahl 2. Dagegen ist die Reihe der *ungeraden Primzahlen*: $3, 5, 7, 11, \cdots$ *unbegrenzt*. Denn gäbe es eine *letzte* Primzahl p, so müßte *jede* Zahl $q > p$ durch mindestens eine der Primzahlen $2, 3, 5, \cdots, p$ teilbar sein, was offenbar bei der Zahl $q = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p + 1$ *nicht* der Fall ist.

Jede Zahl, welche außer sich selbst und der Eins noch andere[3] Teiler besitzt, heißt *zusammengesetzt*.

2. Hat man zwei Zahlen a und b, wo $b > a > 1$, so ist entweder (s. Gl. (11a) des vorigen Paragraphen):

$$b = aq \quad (\text{wo: } 1 < q < b), \tag{1}$$

oder (s. Ungl. (11b)):

$$aq < b < a(q+1) = aq + a$$

(wo: $1 \leqq q < b$). In diesem Falle muß also eine bestimmte Zahl $a_1 \geqq 1$ und $< a$ existieren, derart, daß:

$$b = aq + a_1. \tag{2}$$

Ist also $b > a$ und a *kein* Teiler von b, so muß zwischen a und b eine

1) S. Fußnote 4) S. 31.

2) Etwas allgemeiner sind offenbar auch $bs + ct$ und (mit der vorläufigen Einschränkung $bs > ct$) auch $bs - ct$ Vielfache von a, wenn s und t beliebige Zahlen bedeuten.

3) Hat die Zahl b *einen* von b und 1 verschiedenen Teiler a, etwa:

$$b = a \cdot q \quad (\text{wo: } a < b, \text{ also } q > 1),$$

so hat sie ja allemal noch einen *zweiten* („komplementären") Teiler q, wie bereits am Schluß des vorigen Paragraphen hervorgehoben wurde.

Beziehung von der Form (2) stattfinden. Man bezeichnet in diesem Falle q als den (*unvollständigen*) *Quotienten* der Division von b durch a, die dem Intervall $1 \leqq a_1 < a$ angehörige Zahl a_1 als den (Divisions-)*Rest.*

Die in Gl. (2) enthaltene Formulierung einer zwischen den Zahlen a und b bestehenden Beziehung kann dazu dienen, die Frage nach dem *größten gemeinsamen Teiler* (größten „Gemeinteiler") von a und b in Angriff zu nehmen und schließlich zur Entscheidung zu bringen. Da nämlich aus Gl. (2) folgt: $a_1 = b - aq$, so erkennt man zunächst, daß *jeder* Gemeinteiler von a und b auch ein Teiler von a_1 ist, während umgekehrt aus Gl. (2) hervorgeht, daß *jeder* Gemeinteiler von a_1 und a auch ein Teiler von b sein muß. Die Aufsuchung aller möglichen Gemeinteiler von a und b ist somit zurückgeführt auf die entsprechende Aufgabe für a_1 und a. Hier bestehen nun wiederum die zwei in folgender Form darstellbaren Möglichkeiten, nämlich entweder:

(1a) $$a = a_1 q_1$$
oder:
(2a) $$a = a_1 q_1 + a_2, \quad \text{wo:} \quad 1 \leqq a_2 < a_1.$$

Im ersten Falle ist a_1 ein Teiler von a, also nach dem zuvor gesagten auch von b und zwar, da a_1 *alle möglichen* Gemeinteiler von a und b enthalten muß, der *größte Gemeinteiler* von a und b.

Im zweiten Falle schließt man, wie oben, daß jeder Gemeinteiler von a_2 und a_1 auch ein solcher von a_1 und a, also schließlich von a und b sein muß — *vice versa.* In gleicher Art weiter fortschließend findet man dann entweder:

(1b) $$a_1 = a_2 q_2$$
oder:
(2b) $$a_1 = a_2 q_2 + a_3, \quad \text{wo:} \quad 1 \leqq a_3 < a_2.$$

Allgemein ergibt sich (falls das Verfahren nicht schon mit Gl. (1a) oder (1b) endigt) auf diese Weise eine *Kette von Gleichungen* (der sogenannte *Euklidische Algorithmus*), welche schließlich mit einer Gleichung von der Form (1a), (1b), $\cdots$ abbrechen muß, da ja die Divisionsreste a_1, a_2, a_3, $\cdots$ beständig kleiner werden; also[1]):

(3) $$\begin{cases} b = aq + a_1 \\ a = a_1 q_1 + a_2 \\ a_1 = a_2 q_2 + a_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n-2} = a_{n-1} q_{n-1} + a_n \\ a_{n-1} = a_n q_n, \qquad \text{wo: } a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n \geqq 1. \end{cases}$$

1) Die Schreibweise (3) paßt nur auf diejenigen Fälle, in denen $n \geqq 3$. Im

Jeder Gemeinteiler von b und a ist dann auch Teiler von a_1, $a_2, \cdots, a_n$ und umgekehrt muß jeder Teiler von a_n ein Teiler von a_{n-1}, $a_{n-2}, \cdots, a_1, a, b$ sein. Und da a_n offenbar der *größte* Teiler von sich selbst, so ist schließlich a_n der *größte Gemeinteiler* von a und b.

Ist nun speziell $a_n = 1$ ($n \geqq 1$), d. h. tritt bei dem angegebenen Verfahren an irgendeiner Stelle die 1 als Divisionsrest auf (und zwar dann *eo ipso* als *letzter*), so haben a und b den *einzigen* Gemeinteiler 1. Zwei solche Zahlen a, b heißen alsdann *relative Primzahlen* oder *relativ prim zueinander*[1]), auch *teilerfremd* (indem man von dem *allen* Zahlen gemeinsamen Teiler 1 absieht).

Ist a_n größer als 1, so haben also a und b den gemeinsamen und zwar *größten* gemeinsamen Teiler a_n, sodaß also, wenn etwa

$$a = a_n \cdot a', \quad b = a_n \cdot b',$$

a' und b' *relativ prim* sein müssen.

3. An den Begriff der relativen Primzahlen und die Benutzung des Euklidischen Algorithmus zu ihrer Charakterisierung knüpft der folgende wichtige Satz an (der leicht für selbstverständlich gehalten werden könnte, ohne es in Wirklichkeit zu sein):

Sind a und b relativ prim und ist k eine beliebige Zahl, so muß jeder gemeinsame Teiler von bk und a (oder auch von ak und b) ein Teiler von k sein.

Beweis. Da a und b relativ prim vorausgesetzt werden, so nimmt der Euklidische Algorithmus (3) mit Hinweglassung der letzten Gleichung die folgende Form an[2]):

Falle $n = 2$, bzw. $n = 1$ reduziert sich das System (3) offenbar auf eins der beiden folgenden:

$$\begin{aligned} b &= aq + a_1 \\ a &= a_1 q_1 + a_2 \\ a_1 &= a_2 q_2 \end{aligned}$$

bzw.:

$$\begin{aligned} b &= aq + a_1 \\ a &= a_1 q_1, \end{aligned}$$

während im übrigen die daran geknüpften Schlüsse unverändert bleiben.

1) Auf Grund *dieser* Begriffsbestimmung wird die 1 als *relativ prim zu allen anderen Zahlen* und *zu sich selbst* betrachtet (da sie ja mit allen anderen Zahlen und mit sich selbst den einzigen Gemeinteiler 1 hat).

2) Dabei schließt im Falle $n = 3$ dieses System schon mit der Gleichung:

$$a_1 = a_2 q_2 + 1,$$

$$(4)\quad \begin{cases} b \quad\ = aq \ + a_1 \\ a \quad\ = a_1 q_1 + a_2 \\ a_1 \quad = a_2 q_2 + a_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n-2} = a_{n-1} q_{n-1} + 1. \end{cases}$$

Es bestehen also, wenn man jede dieser Gleichungen mit k multipliziert, die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} a_1 k &= bk \ - aqk \\ a_2 k &= ak \ - a_1 q_1 k \\ a_3 k &= a_1 k - a_2 q_2 k \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ k &= a_{n-2} k - a_{n-1} q_{n-1} k. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung zeigt unmittelbar, daß jeder Gemeinteiler von bk und a (oder auch von ak und b) auch ein Teiler von $a_1 k$, folglich nach der zweiten Gleichung auch von $a_2 k$, nach der dritten von $a_3 k$ sein muß usf. — schließlich also nach der letzten, wie behauptet, ein Teiler von k.

4. Als spezieller Fall des soeben bewiesenen Satzes ergibt sich zunächst der folgende:

Ist a relativ prim zu b und ein Teiler von bk, so muß a schon ein Teiler von k allein sein.

Seien ferner a und b relativ prim gegen eine dritte Zahl c, so kann offenbar das Produkt ab mit c keinen (sc. von 1 verschiedenen) Gemeinteiler haben. Denn jeder Gemeinteiler von c und ab müßte ja nach dem Satze von Nr. 3 ein Teiler sowohl von a als von b sein (je nachdem man die oben mit k bezeichnete Zahl mit a oder mit b identifiziert) — was der Voraussetzung widerspricht. Es gilt somit der Satz:

Sind zwei Zahlen gegen eine dritte relativ prim, so gilt das gleiche von ihrem Produkte.

Dieser Satz läßt sich sofort auf den Fall ausdehnen, daß an die Stelle der zwei Zahlen a, b deren eine beliebige Anzahl, etwa $a_1, a_2, \cdots, a_m$, tritt. Wird ferner angenommen, daß jede dieser Zahlen relativ prim ist

---

während es sich in den Fällen $n = 2$ bzw. $n = 1$ auf

$$\begin{aligned} b &= aq \ + a_1 \\ a &= a_1 q_1 + 1 \end{aligned}$$

bzw. auf

$$b = aq + 1$$

reduziert, im übrigen wieder die daran geknüpften Schlüsse unverändert bleiben.

nicht nur gegen eine einzelne Zahl, sondern gegen jede der Zahlen $c_1, c_2, \cdots, c_n$, so folgt zunächst, daß das Produkt $a_1 a_2 \cdots a_m$ ebenfalls gegen jede der Zahlen $c_1, c_2, \cdots, c_n$ und somit schließlich auch gegen deren Produkt relativ prim ist. Also:

Ist jede der Zahlen $a_1, a_2, \cdots, a_m$ relativ prim gegen jede der Zahlen $c_1, c_2, \cdots, c_n$, so sind auch die Produkte $a_1 a_2 \cdots a_m$ und $c_1 c_2 \cdots c_n$ relativ prim.

§ 7. Bruchsymbole als neue Zeichen für natürliche Zahlen. — Vergleichungs- und Rechnungsregeln für solche Bruchsymbole.

1. Ist $b > a$ und ein Vielfaches von a, etwa:

(1) $$b = a \cdot q,$$

so besteht nach § 5, Gl. (13) hierfür auch die Schreibweise:

(2) $$q = \frac{b}{a}.$$

Es kann hiernach die Zeichenverbindung $\frac{b}{a}$ als ein *neues* Zeichen für eine in der Reihe der natürlichen Zahlen *bereits vorhandene* Zahl q angesehen werden. Wir bezeichnen eine solche Zeichenverbindung $\frac{b}{a}$ als *Bruchsymbol*, kürzer als *Bruch*, die oberhalb des horizontalen „Bruchstriches" stehende Zahl b als den *Zähler*, die unterhalb stehende als den *Nenner*. Es existieren dann offenbar für jede einzelne Zahl q *unbegrenzt viele* solche Bruchsymbole. Denn bezeichnet man aushilfsweise mit (aq) dasjenige in der Zahlenreihe vorhandene Zahlzeichen, welches dem Produkte der beiden Zahlen a und q entspricht, sodaß also:

(3) $$a \cdot q = (aq),$$

so folgt:

(4) $$q = \frac{(aq)}{a}.$$

Denkt man sich hier q beliebig, aber fest gewählt und setzt für a der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3, $\cdots$, so ergibt sich für die Zahl q die unbegrenzte Reihe von Bruchsymbolen:

$$\frac{q}{1}, \frac{(2q)}{2}, \frac{(3q)}{3}, \cdots.$$

Für den weiteren Gang unserer Betrachtungen erscheint es nun wichtig, zunächst die folgenden Fragen zu beantworten:

1) Wie entscheidet man, ob zwei Symbole $\frac{b}{a}, \frac{b'}{a'}$ der betrachteten Art als *gleich* anzusehen sind, d. h. *dieselbe* natürliche Zahl vorstellen,

bzw. welches der beiden Symbole $\frac{b}{a}$, $\frac{b'}{a'}$ als *kleiner* oder *größer* zu gelten hat, d. h. die *kleinere* oder *größere* Zahl vorstellt?

2) Wie lassen sich *Summe* und *Produkt* zweier in der Form $\frac{b}{a}$, $\frac{b'}{a'}$ vorgelegten natürlichen Zahlen wieder durch Symbole dieser Art darstellen?

2. Satz I. *Es ist:*

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} (\mathrm{a}) \ \dfrac{b}{a} = \dfrac{b'}{a'}, & \textit{wenn:} \quad a'b = ab', \ \textit{und umgekehrt}, \\ (\mathrm{b}) \ \dfrac{b}{a} \lesseqgtr \dfrac{b'}{a'}, & \textit{je nachdem:} \quad a'b \lesseqgtr ab', \ \textit{und umgekehrt}. \end{cases}$$

Beweis. Auf Grund der Definition des Symbols $\frac{b}{a}$ (s. Gl. (1) und (2)) hat man:

$$a \cdot \frac{b}{a} = b.$$

Ebenso:

$$a' \cdot \frac{b'}{a'} = b'.$$

Besteht die Voraussetzung:

$$a'b = ab',$$

so läßt sich dieselbe nunmehr in die Form setzen:

$$a' \cdot \left(a \cdot \frac{b}{a}\right) = a \cdot \left(a' \cdot \frac{b'}{a'}\right),$$

also mit Anwendung des Assoziations- und Kommutationsgesetzes der Multiplikation:

$$(aa') \cdot \frac{b}{a} = (aa') \cdot \frac{b'}{a'},$$

woraus schließlich sich ergibt (s. § 4, Gl. (VIIa)):

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}.$$

Umgekehrt folgt aus der letzten Gleichung durch Multiplikation mit aa':

$$(aa') \cdot \frac{b}{a} = (aa') \cdot \frac{b'}{a'}$$

und sodann:

$$a' \cdot \left(a \cdot \frac{b}{a}\right) = a \cdot \left(a' \cdot \frac{b'}{a'}\right),$$

d. h. schließlich:

$$a'b = ab'.$$

Analog ergeben sich die auf die Voraussetzungen $a'b \lesseqgtr ab'$ bzw. $\frac{b}{a} \lesseqgtr \frac{b'}{a'}$ bezüglichen Behauptungen, wenn man in den vorstehenden Re-

lationen das Gleichheitszeichen durchweg durch das Zeichen $<$ oder $>$ ersetzt.

Zusatz. Aus (Ia) folgt, wenn k eine beliebige Zahl bedeutet:

$$\frac{b}{a} = \frac{(bk)}{(ak)}.$$

Insbesondere ist daher:

$$\frac{b}{a} = \frac{(a'b)}{(aa')}, \quad \frac{b'}{a'} = \frac{(ab')}{(aa')},$$

in Worten: Zwei Bruchsymbole mit *verschiedenen* Nennern lassen sich stets *„gleichnamig“* machen, d. h. in solche mit *gleichem Nenner* umformen.

3. Satz II. *Für die Summe zweier durch die Bruchsymbole* $\frac{b}{a}$, $\frac{b'}{a'}$ *dargestellten Zahlen gilt die Formel:*

(IIa) $$\frac{b}{a} + \frac{b'}{a'} = \frac{(a'b + ab')}{aa'}.$$

Haben die beiden Brüche gleichen Nenner a, *so läßt sich ihre Summe in die einfachere Form setzen:*

(IIb) $$\frac{b}{a} + \frac{b'}{a} = \frac{(b + b')}{a}.$$

Beweis. Aus den Beziehungen (s. Gl. (1) und (2)):

$$a \cdot \frac{b}{a} = b, \quad a' \cdot \frac{b'}{a'} = b'$$

folgt durch Multiplikation mit a' bzw. a und Addition:

$$aa'\left(\frac{b}{a} + \frac{b'}{a'}\right) = a'b + ab'$$

und somit, wie behauptet:

$$\frac{b}{a} + \frac{b'}{a'} = \frac{(a'b + ab')}{aa'}.$$

Durch Anwendung dieser Formel auf den besonderen Fall $a' = a$ würde zunächst folgen:

$$\frac{b}{a} + \frac{b'}{a} = \frac{(ab + ab')}{a \cdot a} = \frac{a(b + b')}{a \cdot a},$$

also, mit Berücksichtigung des Zusatzes zu Nr. 2, schließlich:

$$\frac{b}{a} + \frac{b'}{a} = \frac{(b + b')}{a}.$$ [1]

---

1) Umgekehrt würde die Formel (IIa) aus (IIb) folgen, wenn man $\frac{b}{a}$, $\frac{b'}{a'}$ auf gleichen Nenner bringt, also durch $\frac{(a'b)}{(aa')}$, $\frac{(ab')}{(aa')}$ ersetzt und sodann die Formel (IIb) anwendet, deren Richtigkeit andererseits unmittelbar aus

$$a \cdot \frac{b}{a} = b, \quad a \cdot \frac{b'}{a} = b'$$

durch Addition hervorgehen würde.

4. Satz III. *Für das Produkt zweier durch die Bruchsymbole* $\frac{b}{a}$, $\frac{b'}{a'}$ *dargestellten Zahlen gilt die Formel:*

$$\text{(III)} \qquad \frac{b}{a} \cdot \frac{b'}{a'} = \frac{(bb')}{(aa')}.$$

Beweis. Aus

$$a \cdot \frac{b}{a} = b, \quad a' \cdot \frac{b'}{a'} = b'$$

folgt durch Multiplikation:

$$(aa') \cdot \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{b'}{a'}\right) = (bb')$$

und somit, wie behauptet:

$$\left(\frac{b}{a} \cdot \frac{b'}{a'}\right) = \frac{(bb')}{(aa')}.$$

§ 8. Eigentliche und uneigentliche Brüche. — Vergleichungs- und Rechnungsregeln. — Vollständige Erledigung des Divisionsproblems für natürliche Zahlen.

1. Wir gehen jetzt darauf aus, unseren Zahlvorrat in der Weise zu vermehren, daß die bisher unter besonderen Voraussetzungen ausführbaren *umgekehrten* Rechnungsoperationen mit natürlichen Zahlen in *jedem* Falle ausführbar werden. Um dieses Ziel zunächst für die *Division* zu erreichen, führen wir jetzt alle möglichen Symbole von der Form $\frac{b}{a}$ ein, unter a und b natürliche Zahlen verstanden, ohne Rücksicht darauf, ob b ein Vielfaches von a oder auch nur, ob $b > a$.[1]) Jedes solche Symbol soll dann als ein *Bruch* mit dem *Zähler* b und dem *Nenner* a bezeichnet werden und zwar als ein *uneigentlicher*, wenn b ein Vielfaches von a, in jedem anderen Falle als ein *eigentlicher*. Die *eigentlichen* Brüche $\frac{b}{a}$ unterscheidet man wiederum noch in *echte* und *unechte*, je nachdem $b < a$ oder $b > a$. Die *eigentlichen* Brüche werden auch als *gebrochene* Zahlen, und im Gegensatz hierzu die *natürlichen* Zahlen als *ganze* bezeichnet.

Während nun die *uneigentlichen* Brüche, also die im vorigen Paragraphen bereits betrachteten Bruchsymbole, lediglich als *andere Zeichen* für die *natürlichen Zahlen* auftraten, so sind die *eigentlichen* Brüche vollkommen *neue Zeichen*, die wir dadurch zu neuen *Zahl*zeichen machen

1) Dabei wird, damit kein Widerspruch mit unseren bisherigen Bezeichnungen der *Division* entsteht, durch Festsetzung geeigneter Rechnungsregeln dafür Sorge getragen werden, daß $\frac{b}{a}$ in *jedem* Falle als Lösung des Divisionsproblems

$$ax = b$$

erscheint (s. Nr. 5 dieses Paragraphen).

wollen, daß wir ihre *Sukzession* innerhalb der Reihe der natürlichen Zahlen, d. h. schließlich die Sukzession aller möglichen eigentlichen und uneigentlichen Brüche eindeutig festlegen, sodann die Grundoperationen der *Addition* und *Multiplikation* auf sie auszudehnen suchen — und zwar das alles in der Weise, daß mit den bisherigen Festsetzungen und Rechnungsregeln keinerlei Widerspruch entsteht. Ist dieses Ziel überhaupt erreichbar, so ist die Möglichkeit eines Erfolges nur gegeben, wenn wir diejenigen Regeln, die im vorigen Paragraphen für die *uneigentlichen* Brüche als direkte *Folgerungen* der für natürliche Zahlen geltenden sich ergaben, nunmehr als entsprechende *Definitionen* für die Beziehungen der *eigentlichen* Brüche unter sich und in Verbindung mit *uneigentlichen* Brüchen einführen. Damit wäre dann freilich zunächst nur soviel erreicht, daß kein Widerspruch entsteht, falls die in Frage kommenden Brüche sich auf *uneigentliche* reduzieren. Des weiteren wird jedoch noch ausdrücklich nachzuweisen sein, daß jene Definitionen in *jedem* Falle den an die Begriffe der *Gleichheit* bzw. *Ungleichheit*, der *Addition* und *Multiplikation* zu stellenden, weiter unten näher bezeichneten Forderungen Genüge leisten.

Wir *definieren* also für den Fall, daß mindestens einer der beiden Brüche $\frac{b}{a}$, $\frac{b'}{a'}$ ein eigentlicher ist, deren *Gleichheit* bzw. *Ungleichheit*, sowie ihre *Addition* und *Multiplikation* durch die im vorigen Paragraphen mit (I)—(III) bezeichneten Formeln:

(I) (a) *Es ist:* $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$, *wenn:* $a'b = ab'$, *und umgekehrt,*[1])

(b) $\frac{b}{a} \lesseqgtr \frac{b'}{a'}$, *je nachdem:* $a'b \lesseqgtr ab'$, *und umgekehrt.*[2])

1) Insbesondere ist also:

$$\frac{b}{a} = \frac{b}{a'}, \text{ wenn: } a = a', \text{ und umgekehrt,}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a}, \text{ wenn: } b = b', \text{ und umgekehrt.}$$

2) Hieraus folgt insbesondere:

$$\frac{b}{a} < 1 \ \left(= \frac{1}{1}\right),$$

wenn $b < a$. Also: *Alle echten Brüche sind kleiner als* 1.

Ferner:

$$\frac{b}{a} < \frac{b}{a'},$$

wenn $a' < a$, also $a > a'$, d. h.: *Brüche mit gleichem Zähler nehmen bei wachsendem Nenner beständig ab.*

Andererseits hat man:

$$\frac{b}{a} < \frac{b'}{a},$$

wenn $b < b'$, also: *Brüche mit gleichem Nenner nehmen bei wachsendem Zähler beständig zu.*

$$\text{(II)} \begin{cases} \text{(a)} \quad \textit{Es ist:} \quad \frac{b}{a} + \frac{b'}{a'} = \frac{(a'b + ab')}{(aa')}, \\ \text{(b)} \; \textit{und speziell:} \; \frac{b}{a} + \frac{b'}{a} = \frac{(b + b')}{a}. \end{cases}$$

$$\text{(III)} \qquad \textit{Es ist:} \qquad \frac{b}{a} \cdot \frac{b'}{a'} = \frac{(bb')}{(aa')}.$$

Man bemerke, daß diese Gleichungen auch die entsprechenden Beziehungen zwischen *eigentlichen Brüchen* und *natürlichen* Zahlen regeln, da man ja eine natürliche Zahl b' auch durch den uneigentlichen Bruch $\frac{b'}{1}$ $\left(\text{oder auch, nach Bedarf, durch } \frac{ab'}{a}\right)$ ersetzen kann.

2. *Bemerkungen zu Formel* (I). Um zunächst die Widerspruchslosigkeit der Gleichheitsdefinition (Ia) festzustellen, hat man zu zeigen, daß auf Grund derselben aus den beiden Beziehungen:

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}, \quad \frac{b'}{a'} = \frac{b''}{a''}$$

stets die folgende hervorgeht:

$$\frac{b}{a} = \frac{b''}{a''}.$$

Man hat nun, wenn die beiden obigen Gleichungen bestehen, nach (Ia):

$$a'b = ab', \quad a''b' = a'b''$$

und daher, wenn man die erste dieser Gleichungen mit a'', die zweite mit a multipliziert:

$$a'a''b = aa''b', \quad aa''b' = aa'b'',$$

also:

$$a'a''b = aa'b''$$

$$a''b = ab''$$

d. h. nach (Ia) in der Tat:

$$\frac{b}{a} = \frac{b''}{a''}.$$

Das entsprechende gilt bezüglich der Ungleichheitsdefinition (Ib), d. h. man findet in ganz analoger Weise, daß aus den Voraussetzungen

$$\frac{b}{a} < \frac{b'}{a'}, \quad \frac{b'}{a'} < \frac{b''}{a''}$$

und zwar auch dann, wenn *eine* dieser beiden *Ungleichungen* durch eine *Gleichung* ersetzt wird, stets folgt:

$$\frac{b}{a} < \frac{b''}{a''}.$$

Aus (Ia) folgt wieder (wie S. 40, Zusatz), wenn k eine beliebige ganze Zahl bedeutet:

$$\text{(1)} \qquad \frac{(bk)}{(ak)} = \frac{b}{a}.$$

Zu jedem *eigentlichen* Bruche gibt es also (gerade so, wie zu jedem *uneigentlichen*) unbegrenzt viele ihm *gleiche*. Sei nun etwa:

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{und} \quad a < a',$$

dann muß auch sein:

$$b < b'.$$

Denn wäre $b \geqq b'$, so hätte man, wegen: $a' > a$, auch: $a'b > ab'$, also nach (Ib): $\frac{b}{a} > \frac{b'}{a'}$, was der Voraussetzung widerspricht.

Ganz ebenso würde aus der Annahme $b < b'$ folgen, daß auch $a < a'$ sein muß.

Unter allen (eigentlichen oder uneigentlichen) *gleichen* Brüchen $\frac{b}{a}, \frac{b'}{a'}, \frac{b''}{a''}, \cdots$ muß es nun offenbar *mindestens einen* geben, welcher den *kleinsten* überhaupt vorkommenden *Nenner* besitzt. Da aber dieser nach dem eben gesagten auch den *kleinsten* überhaupt vorkommenden *Zähler* besitzt, so kann es allemal nur *einen einzigen* solchen Bruch geben. Wird dieser etwa mit $\frac{b_1}{a_1}$ bezeichnet, so müssen offenbar b_1 und a_1 *relativ prim* sein. Denn, hätten a_1, b_1 einen von 1 verschiedenen Gemeinteiler k, sodaß also:

$$a_1 = k \cdot a_1', \quad b_1 = k \cdot b_1',$$

so wäre:

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_1'}{a_1'}, \quad \text{wo jetzt:} \quad a_1' < a_1, \quad b_1' < b_1,$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Man bezeichnet einen Bruch, dessen Zähler und Nenner *relativ prim* sind, als *reduziert* (oder auch als *irreduzibel*) und kann darnach das vorstehende Ergebnis auch so aussprechen: Unter allen *gleichen* Brüchen $\frac{b}{a}$ befindet sich stets mindestens ein *reduzierter* Bruch $\frac{b_1}{a_1}$.

Sei nun $\frac{b}{a}$ ein *beliebiger*, $\frac{b_1}{a_1}$ ein ihm gleicher *reduzierter* Bruch, so hat man:

$$\frac{b}{a} = \frac{b_1}{a_1}, \quad \text{also:} \quad a_1 b = a b_1.$$

Da nun a_1 *relativ prim* zu b_1, andererseits aber a_1 ein *Teiler* von ab_1 sein muß, so folgt aus dem ersten Satze § 6 Nr. 4, daß a_1 ein Teiler von a, und durch die gleiche Schlußweise, daß b_1 ein Teiler von b ist, sodaß etwa gesetzt werden kann:

$$a = k \cdot a_1, \quad b = k' \cdot b_1.$$

Durch Einsetzen dieser Beziehungen in die Gleichung $a_1 b = a b_1$ folgt aber:

$$a_1 (k' b_1) = (k a_1) b_1,$$

anders geschrieben: $(a_1 b_1) k' = (a_1 b_1) k$, also: $k' = k$.

Somit ergibt sich: Ist $\frac{b_1}{a_1}$ ein *reduzierter* Bruch, so sind *alle überhaupt möglichen* ihm *gleichen* Brüche in der Form $\frac{k b_1}{k a_1}$ enthalten. Danach sind also insbesondere zwei *gleiche reduzierte* Brüche allemal *identisch*. Mit anderen Worten, es gibt in jeder *Klasse* von unbegrenzt vielen *gleichen* Brüchen nur *einen reduzierten*, welcher dann gewissermaßen als *Repräsentant* der ganzen *Klasse* angesehen werden kann und auch als *reduzierte Form* der ihr angehörigen Brüche bezeichnet wird. (NB. Besteht die betreffende Klasse aus *uneigentlichen* Brüchen, so hat der zugehörige *reduzierte* Bruch offenbar stets den Nenner 1 und kann schließlich auch durch die den Zähler bildende natürliche Zahl ersetzt werden.)

3. *Bemerkungen zur Additionsformel* (IIa). Hier müßte noch gezeigt werden, daß durch die fragliche Formel die *Summe* zweier Brüche wirklich *eindeutig* definiert wird, daß sie also keine Änderung erleidet, wenn man die Brüche $\frac{b}{a}$, $\frac{b'}{a'}$ durch irgendwelche ihnen *gleiche* ersetzt.

Bezeichnet man etwa mit $\frac{b_1}{a_1}$, $\frac{b_1'}{a_1'}$ die reduzierten Formen von $\frac{b}{a}$, $\frac{b'}{a'}$, so sind alle mit $\frac{b}{a}$ bzw. $\frac{b'}{a'}$ gleichen Brüche in der Form $\frac{(k b_1)}{(k a_1)}$ bzw. $\frac{(k' b_1')}{(k' a_1')}$ enthalten (wo k bzw. k' jede beliebige natürliche Zahl). Nach Gl. (IIa) ergibt sich sodann:

$$\frac{(k b_1)}{(k a_1)} + \frac{(k' b_1')}{(k' a_1')} = \frac{(k k' a_1' b_1 + k k' a_1 b_1')}{(k k' a_1 a_1')} = \frac{(a_1' b_1 + a_1 b_1')}{a_1 a_1'},$$

sodaß also die betreffende Summe von der Wahl der Zahlen k und k' völlig unabhängig ist.

Hieraus folgt insbesondere, daß:

$$(2) \qquad \frac{b}{a} + \frac{b'}{a'} = \frac{b}{a} + \frac{b''}{a''}, \quad \text{wenn:} \quad \frac{b'}{a'} = \frac{b''}{a''}.$$

Dieses Ergebnis ist auch *umkehrbar*. Man hat nämlich:

$$\frac{b}{a} + \frac{b'}{a'} = \frac{a' b + a b'}{a a'} = \frac{a' a'' b + a a'' b'}{a a' a''},$$

$$\frac{b}{a} + \frac{b''}{a''} = \frac{a'' b + a b''}{a a''} = \frac{a' a'' b + a a' b''}{a a' a''}$$

und daher, wenn die *erste* der Gleichungen (2) besteht (mit Berücksichtigung von Fußn. 1) S. 42):

$$a' a'' b + a a'' b' = a' a'' b + a a' b'',$$

also:

$$a'' b' = a' b''$$

und schließlich:

$$\frac{b'}{a'} = \frac{b''}{a''}.$$

Ganz analog würde sich offenbar ergeben:

$$(3)\quad \left|\begin{array}{l} \frac{b}{a}+\frac{b'}{a'} \lesseqgtr \frac{b}{a}+\frac{b''}{a''}, \text{ je nachdem: } \frac{b'}{a'} \lesseqgtr \frac{b''}{a''}, \text{ und umgekehrt}^{1)}; \\ \qquad\qquad \frac{b}{a}+\frac{b'}{a'} > \frac{b}{a}. \end{array}\right.$$

Daß die durch Formel (IIa), nämlich:

$$\frac{b}{a}+\frac{b'}{a'}=\frac{(a'b+ab')}{aa'}$$

definierte Addition *kommutativ* ist, erkennt man unmittelbar daraus, daß die rechte Seite bei gleichzeitiger Vertauschung von a mit a', b mit b' ungeändert bleibt.

Bildet man sodann:

$$\left(\frac{b}{a}+\frac{b'}{a'}\right)+\frac{b''}{a''}=\frac{(a'b+ab')}{aa'}+\frac{b''}{a''}$$
$$=\frac{(a'a''b+aa''b'+aa'b'')}{aa'a''}$$

und:

$$\frac{b}{a}+\left(\frac{b'}{a'}+\frac{b''}{a''}\right)=\frac{b}{a}+\frac{(a''b'+a'b'')}{a'a''}$$
$$=\frac{(a'a''b+aa''b'+aa'b'')}{aa'a''},$$

so zeigt die Übereinstimung der rechten Seiten, daß die fragliche Addition auch *assoziativ* ist.[2]) —

Reduziert sich der erste Summand $\frac{b}{a}$ auf eine ganze Zahl b, so folgt aus Gl. (IIa), indem man $a=1$ setzt:

$$b+\frac{b'}{a'}=\frac{a'b+b'}{a'}.$$

Ist nun $\frac{c}{a'}$ irgendein *unechter* Bruch, also $c>a'$, so läßt sich c allemal in die Form setzen (s. § 6, S. 34, Gl. (2)):

$$c=a'b+b', \quad \text{wo:} \quad 1 \leqq b' < a',$$

und man findet daher durch Umkehrung der vorhergehenden Gleichung:

$$(4)\qquad \frac{c}{a'}=\frac{a'b+b'}{a'}=b+\frac{b'}{a'},$$

d. h.

Jeder unechte Bruch läßt sich darstellen als Summe aus einer natürlichen Zahl und einem echten Bruche.

---

1) Die Beziehungen (2) (mit Umkehrung) und (3) nebst den durch Kommutation der Addition daraus hervorgehenden entsprechen genau den für natürliche Zahlen bestehenden: § 2, (III)—(VIb).

2) Bezüglich der Ausdehnung der *Definitionen* von *Addition* und *Multiplikation*, sowie des *kommutativen* und *assoziativen* Verhaltens auf eine beliebige Anzahl von Elementen in dem vorliegenden, wie auch in jedem späteren ähnlichen Zusammenhange sei ein für allemal auf die Definitionen von § 2, Nr. 5 (S. 14), § 4, Nr. 6 (S. 29), sowie auf das Beweisverfahren von § 3, Nr. 6 (S. 22), § 4, Nr. 6 (S. 30) verwiesen.

Ist ferner $b > 1$, sodaß also gesetzt werden kann: $b = 1 + (b-1)$, so folgt durch umgekehrte Anwendung der Additionsformel:

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{a} + \frac{(b-1)}{a}.$$

Ist auch noch $(b-1) > 1$, also: $b - 1 = 1 + (b-2)$, so folgt weiter:

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{(b-2)}{a}$$

und bei passender Fortsetzung dieses Verfahrens schließlich:

$$(5) \qquad \frac{b}{a} = \underbrace{\frac{1}{a}}_{1} + \underbrace{\frac{1}{a}}_{2} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{a}}_{b},$$

d. h.

Jeder Bruch $\frac{b}{a}$, *wo* $b > 1$, *kann dargestellt werden als eine Summe von* b *Summanden* $\frac{1}{a}$.

4. *Bemerkungen zur Multiplikationsformel* (III). Die Unveränderlichkeit des *Produktes* zweier Brüche $\frac{b}{a}, \frac{b'}{a'}$ auf Grund der Definitionsformel (III), sofern man jene Brüche durch irgendzwei ihnen gleiche ersetzt, erkennt man, unter Beibehaltung der in der vorigen Nummer benutzten Bezeichnungen, ohne weiteres aus der Beziehung:

$$\frac{(kb_1)}{(ka_1)} \cdot \frac{(k'b_1')}{(k'a_1')} = \frac{(kk'b_1b_1')}{(kk'a_1a_1')} = \frac{(b_1b_1')}{(a_1a_1')}.$$

Daraus folgt wiederum insbesondere, daß:

$$(6) \qquad \frac{b}{a} \cdot \frac{b'}{a'} = \frac{b}{a} \cdot \frac{b''}{a''}, \quad \text{wenn:} \quad \frac{b'}{a'} = \frac{b''}{a''}.$$

Umgekehrt zieht auch die *erste* dieser Gleichungen die *zweite* nach sich. Man hat nämlich, falls die erste Voraussetzung besteht:

$$\frac{(bb')}{(aa')} = \frac{(bb'')}{(aa'')},$$

und daher nach (Ia):

$$(aa'')(bb') = (aa')(bb'')$$
$$a''b' = a'b'',$$

somit schließlich:

$$\frac{b'}{a'} = \frac{b''}{a''}.$$

Ganz analog würde sich offenbar ergeben:

$$(7) \qquad \frac{b}{a} \cdot \frac{b'}{a'} \lessgtr \frac{b}{a} \cdot \frac{b''}{a''}, \text{ je nachdem: } \frac{b'}{a'} \lessgtr \frac{b''}{a''}, \text{ und umgekehrt.}^{1)}$$

1) Vgl. die analogen Beziehungen für natürliche Zahlen: § 4, (V)—(VIII).

Ferner ergibt sich aus den Beziehungen:

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{b'}{a'}=\frac{(bb')}{(aa')},$$
$$\frac{b}{a}\cdot\frac{b'}{a'}\cdot\frac{b''}{a''}=\frac{(bb'b'')}{(aa'a'')}$$

infolge der *kommutativen* und *assoziativen* Eigenschaften der rechten Seiten der *kommutative* und *assoziative* Charakter der betreffenden Bruchprodukte.

Um auch noch die *distributive* Beschaffenheit festzustellen, hat man:

$$\begin{aligned}\left(\frac{b}{a}+\frac{b'}{a'}\right)\cdot\frac{b''}{a''}&=\frac{(a'b+ab')}{aa'}\cdot\frac{b''}{a''}\\&=\frac{(a'bb''+ab'b'')}{aa'a''}\\&=\frac{(a'bb'')}{(aa'a'')}+\frac{(ab'b'')}{(aa'a'')}\\&=\frac{(bb'')}{(aa'')}+\frac{(b'b'')}{(a'a'')}\\&=\frac{b}{a}\cdot\frac{b''}{a''}+\frac{b'}{a'}\cdot\frac{b''}{a''}.\end{aligned}$$

Hiernach hat man insbesondere, wenn $c>1$:

$$\frac{bc}{a}=\frac{b}{a}\cdot c=\frac{b}{a}(1+(c-1))=\frac{b}{a}+\frac{b}{a}(c-1)$$

und gewinnt somit bei passender Fortsetzung dieser Schlußweise die folgende Verallgemeinerung der Formel (5):

(8) $$\frac{bc}{a}=\frac{b}{a}\cdot c=\underbrace{\frac{b}{a}}_{1}+\underbrace{\frac{b}{a}}_{2}+\cdots+\underbrace{\frac{b}{a}}_{c},$$

sodaß, analog wie bei der Multiplikation zweier natürlicher Zahlen, das Resultat der Multiplikation eines Bruches $\frac{b}{a}$ mit einer natürlichen Zahl c einer c-maligen Addition jenes Bruches gleichkommt.

5. Es bleibt noch zu zeigen, daß nach Einführung der eigentlichen Brüche die *Division* natürlicher Zahlen stets *ausführbar* wird, daß also die Gleichung:

(9) $$ax=b$$

nunmehr stets eine und (in einem sogleich noch näher anzugebenden Sinne) nur eine Lösung besitzt. Da nämlich:

$$\begin{aligned}a\cdot\frac{b}{a}=\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{a}&=\frac{(ab)}{a}\quad\text{(nach Nr. 1, Gl. (III))}\\&=b\quad\text{(nach Nr. 2, Gl. (1))},\end{aligned}$$

so ist offenbar $x = \frac{b}{a}$ eine Lösung der Gl. (9). Es ist aber auch $\frac{b}{a}$ die *einzige* Lösung in *dem* Sinne, daß für jede *anders bezeichnete* Lösung $\frac{b'}{a'}$ auf Grund unserer Definitionen unzweideutig die Beziehung $\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}$ besteht, sodaß also das *Zeichen* $\frac{b'}{a'}$ *dieselbe Zahl* vorstellt, wie $\frac{b}{a}$ (vgl. Nr. 1 der Einleitung). Hätte man nämlich:

$$a \cdot \frac{b'}{a'} = a \cdot \frac{b}{a} \quad \left(\text{anders geschrieben: } \frac{a}{1} \cdot \frac{b'}{a'} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{a}\right),$$

so folgt aus der Umkehrung von Gl. (6), daß:

$$\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}.$$

§ 9. Die absoluten oder positiven rationalen Zahlen. — Ihre Addition, Multiplikation und Division.

1. Man faßt die natürlichen Zahlen, eigentlichen und uneigentlichen Brüche unter der Gesamtbezeichnung der *absoluten* oder *positiven rationalen Zahlen* zusammen. Dabei wird das Beiwort *„positiv"* freilich erst durch eine weiterhin noch vorzunehmende Erweiterung unseres Zahlenvorrats seine Rechtfertigung finden. Wir wollen dasselbe jedoch schon jetzt ausschließlich anwenden[1]), teils um die Bezeichnung später nicht wechseln zu müssen, teils aber auch weil diese Antizipation sehr bald noch in anderer Beziehung sich als zweckmäßig erweisen wird.

Die *natürlichen* Zahlen, sowie die ihnen gleich geltenden *uneigentlichen Brüche* werden in diesem Zusammenhange als *ganze*, die *eigentlichen Brüche* als *gebrochene* positive rationale Zahlen bezeichnet.

Wie die Betrachtungen der vorangehenden Paragraphen gezeigt haben, existieren für jede einzelne rationale Zahl unbegrenzt viele Zahlzeichen. Man kann aber ein *vollständiges System der positiven rationalen Zahlen* bilden, in welchem *jede* Zahl *einmal* und *nur* einmal vorkommt, indem man aus jeder Klasse gleichgeltender Zahlzeichen ein bestimmtes als Repräsentanten auswählt, etwa für die *uneigentlichen Brüche* die entsprechenden *natürlichen Zahlen*, für die *eigentlichen* deren *reduzierte Formen* (wobei es jedoch freisteht, im Bedarfsfalle jedes dieser Zahlzeichen durch ein anderes, ihm gleichgeltendes zu ersetzen). In diesem System, dessen einzelne Individuen wir generell wieder mit *einfachen* — und zwar, zum Unterschiede von den bisher gebrauchten, *kleinen griechischen* Buch-

1) Da in diesem Paragraphen von anderen rationalen Zahlen als diesen „positiven" nicht die Rede ist, werden wir jenes Beiwort zuweilen weglassen.

staben $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ bezeichnen wollen[1]), kommt jedem dieser Zeichen ein eindeutig bestimmter Platz innerhalb des ganzen Systems zu, und die auf Grund unzweideutiger Vorschriften bestehenden Beziehungen von der Form $\alpha < \beta$ bzw. $\alpha > \beta$ besagen, auch wenn wir sie in die Worte kleiden: „α kleiner als β" bzw. „α größer als β", wiederum nichts anderes, als daß ein bestimmtes Ordnungsgesetz besteht, nach welchem α dem β vorangeht bzw. nachfolgt. Besteht in dieser Beziehung für das *System der positiven rationalen* Zahlen eine vollständige Analogie mit der ursprünglich betrachteten (nunmehr lediglich einen *Bestandteil* dieses Systems bildenden) *Reihe der natürlichen Zahlen*, so sind andererseits die folgenden zwei fundamentalen Unterschiede hervorzuheben:

1) Die Reihe der natürlichen Zahlen besitzt ein bestimmtes *erstes* Element, die 1; anders ausgesprochen: es gibt eine „*kleinste*" natürliche Zahl, nämlich 1. In dem System der positiven rationalen Zahlen existieren dagegen zu *jeder* Zahl noch unbegrenzt viele ihr vorangehende. Zunächst hat man ja für jeden *echten* Bruch $\alpha = \frac{b}{a}$ die Beziehung $\frac{b}{a} < 1$. Sodann ergibt sich aber weiter, wie auch der echte Bruch $\frac{b}{a}$ gewählt werden möge:

$$\frac{b}{a} \geqq \frac{1}{a} > \frac{1}{a+1} > \frac{1}{a+2} > \cdots.$$

Es gibt somit keine kleinste positive rationale Zahl.

2) In der Reihe der natürlichen Zahlen gehört zu jeder Zahl a eine *unmittelbar darauf folgende* $(a+1)$, d. h. es gibt *keine* natürliche Zahl b, derart daß: $a < b < (a+1)$. Nimmt man dagegen zwei positive rationale Zahlen α und α' ganz beliebig an, so gibt es stets *unbegrenzt viele* rationale Zahlen β „*zwischen*" α und α', d. h. der Bedingung $\alpha < \beta < \alpha'$ genügend. Sei etwa:

$$\alpha = \frac{b}{a}, \quad \alpha' = \frac{b'}{a'} > \frac{b}{a},$$

d. h.:

$$ab' > a'b, \quad \text{etwa:} \quad ab' = a'b + c, \quad \text{wo:} \quad c \geqq 1,$$

oder, wenn man die Brüche auf gleichen Nenner bringt:

$$\alpha = \frac{a'b}{aa'}, \quad \alpha' = \frac{ab'}{aa'}.$$

---

1) Jedes dieser Zeichen $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ kann also, je nach Bedarf, eine natürliche Zahl oder einen (eigentlichen oder uneigentlichen) Bruch vorstellen, dient also im ersten Falle als Ersatz für einen *einfachen* lateinischen Buchstaben, im zweiten für ein Buchstaben*paar* von der Form $\frac{b}{a}$.

Bedeutet dann n eine beliebige natürliche Zahl, größer als 1, so hat man weiter:

$$\alpha = \frac{na'b}{naa'}, \quad \alpha' = \frac{nab'}{naa'}, \quad \text{wo jetzt: } nab' = na'b + nc \quad \text{und} \quad nc \geqq n.$$

Alsdann folgt aber:

$$\alpha < \frac{na'b+1}{naa'} < \frac{na'b+2}{naa'} < \cdots < \frac{na'b+(nc-1)}{naa'} < \alpha'$$

und, da es freisteht, n beliebig zu vergrößern, so ergibt sich damit die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptung.

Es ist also nicht möglich, alle zwischen irgendzwei positiven rationalen Zahlen α und α' liegenden, d. h. der Bedingung $\alpha < \beta < \alpha'$ genügenden rationalen Zahlen β *„der Größe nach"* (d. h. nach der Vorschrift (Ib) des vorigen Paragraphen) *geordnet* anzuschreiben. Aus diesem Grunde haben wir von vornherein im Gegensatz zu der *Reihe* der natürlichen Zahlen nur von dem *System* der positiven rationalen Zahlen gesprochen. Später wird sich freilich zeigen, daß man auch dieses System in Form einer unbegrenzten *Reihe* anschreiben kann, wenn man die Forderung fallen läßt, daß deren Glieder in dem obigen Sinne *der Größe nach geordnet* sein sollen.

2. Sind α und α' irgendzwei positive rationale Zahlen, so sind auf Grund von Nr. 3 und 4 des vorigen Paragraphen die Summe $\alpha + \alpha'$ und das Produkt $\alpha \cdot \alpha'$ eindeutig definierte, im Gebiete der positiven rationalen Zahlen allemal wirklich vorhandene Zahlen. Zugleich haben, geradeso wie bei den natürlichen Zahlen, Addition und Multiplikation kommutativen und assoziativen, die Multiplikation auch distributiven Charakter. Auch gelten ganz analoge Beziehungen, wie sie in § 2, (III) bis (VII) für die Addition, in § 4, (IV)—(IX) für die Multiplikation natürlicher Zahlen bewiesen wurden, insbesondere (S. 45, Gl. (2), (3); S. 47, Gl. (6), (7)):

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \quad \textit{Aus} \left\{ \begin{matrix} \alpha + \beta \left\{ \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} \right\} \alpha' + \beta \\ \alpha \cdot \beta \left\{ \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} \right\} \alpha' \cdot \beta \end{matrix} \right\} \quad \textit{folgt:} \quad \alpha \left\{ \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} \right\} \alpha', \ \textit{und umgekehrt.}$$

Da ferner in den Formeln für die Addition und Multiplikation von Brüchen schließlich alles auf Additionen und Multiplikationen natürlicher Zahlen zurückgeführt wird, so erschließt man ohne Schwierigkeit, daß die fraglichen Operationen unter Beibehaltung ihrer Grundeigenschaften auch auf eine beliebige Anzahl positiver rationaler Zahlen ausgedehnt werden können.

Wir wollen nun zunächst auch noch die in Nr. 5 des vorigen Paragraphen für *natürliche* Zahlen erledigte Operation der *Division* auf unsere

rationalen Zahlen übertragen. Seien also wiederum α und α' zwei positive rationale Zahlen, so verstehen wir nach Analogie (s. § 5, S. 32, Gl. (7), (12), (13)) unter der *Division* von α durch α' die Bestimmung einer Zahl ξ, welche die Gleichung befriedigt:

$$\alpha\xi = \alpha', \tag{3}$$

und wir bedienen uns, um die Abhängigkeit der vorläufig noch völlig hypothetischen Zahl ξ zu den gegebenen Zahlen α und α' auszudrücken, auch der Schreibweise:

$$\xi = \frac{\alpha'}{\alpha}. \tag{4}$$

Dabei kann dann das Symbol $\frac{\alpha'}{\alpha}$ wieder als neues Zeichen für eine bereits vorhandene Zahl angesehen werden, sobald die eindeutige Existenz einer der Gl. (3) genügenden Zahl ξ nachgewiesen ist.

Wir betrachten nun zunächst den besonderen Fall $\alpha' = 1$, also — indem wir der Deutlichkeit halber für diesen Fall ξ_1 statt ξ schreiben — die Gleichung:

$$\alpha\xi_1 = 1, \tag{5}$$

aus welcher nach Analogie von Gl. (4) resultieren würde:

$$\xi_1 = \frac{1}{\alpha}. \tag{6}$$

Sei nun etwa:

$$\alpha = \frac{b}{a},$$

so hat man auf Grund der Multiplikationsformel (III) des vorigen Paragraphen:

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{(ab)}{(ab)} = 1,$$

also, wie die Vergleichung mit (5) zeigt:

$$\alpha \cdot \frac{a}{b} = 1, \quad \text{d. h. nach (6):} \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{a}{b}. \tag{7}$$

Es entspricht also dem Symbol $\frac{1}{\alpha}$ eine im Gebiete der *rationalen Zahlen* allemal wirklich *vorhandene* und zwar, wie aus den *Gleichungen* (2) hervorgeht, *einzige* Zahl, welche dann als die zu α *reziproke* Zahl bezeichnet wird.

Wird jetzt Gl. (3) mit dieser Zahl $\frac{1}{\alpha}$ multipliziert, so ergibt sich ohne weiteres:

$$\xi = \alpha' \cdot \frac{1}{\alpha},$$

also mit Berücksichtigung von Gl. (4)

(8) $$\frac{\alpha'}{\alpha} = \alpha' \cdot \frac{1}{\alpha},$$

d. h.

Die Division der rationalen Zahl α' durch die rationale Zahl α wird erzielt durch die Multiplikation von α' mit der reziproken Zahl zu α.

Daraus folgt, daß man mit Bruchsymbolen von der Form $\frac{\alpha'}{\alpha}$ genau so rechnen kann, wie mit gewöhnlichen Brüchen. Ist nämlich: $\alpha = \frac{b}{a}$, $\alpha' = \frac{b'}{a'}$, so findet man mit Hilfe der Formel (8): $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{a b'}{a' b}$, woraus sich dann alles weitere leicht ergibt (z. B.

$$\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\alpha'\beta + \alpha\beta'}{\alpha\beta}$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha} \cdot \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\alpha'\beta'}{\alpha\beta} \quad \text{usf.}).$$

§ 10. Die Subtraktion im Gebiete der positiven rationalen Zahlen. — Vergleichungs- und Rechnungsregeln für positive Differenzensymbole.

1. Sind α_1, α_2 zwei positive rationale Zahlen und $\alpha_2 > \alpha_1$, so läßt sich zeigen, daß die Gleichung

(1) $$\xi + \alpha_1 = \alpha_2$$

im Gebiete der positiven rationalen Zahlen eine und sodann, wie aus den *Gleichungen* (1) des vorigen Paragraphen hervorgeht, *nur* eine Lösung ξ besitzt.

Setzt man in der Gl. (1) etwa:

$$\alpha_1 = \frac{b_1}{a_1}, \qquad \alpha_2 = \frac{b_2}{a_2} \quad (\text{wo also: } a_1 b_2 > a_2 b_1),$$

so geht sie nach Multiplikation mit $a_1 a_2$ in die folgende über:

$$a_1 a_2 \xi + a_2 b_1 = a_1 b_2,$$

sodaß also:

(2) $$\xi = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{a_1 a_2},$$

ein Ausdruck, welcher wegen $a_1 b_2 > a_2 b_1$ eine wohldefinierte *positive rationale*, überdies, wie unmittelbar zu sehen, der Gl. (1) tatsächlich genügende *Zahl* vorstellt.

Führt man also für die nach ξ aufgelöste Gl. (1), analog wie bei der

entsprechenden Aufgabe für natürliche Zahlen (§ 5, S. 30, Gl. (1), (4), (5)), die *Bezeichnung* ein:

$$(3) \qquad \xi = \alpha_2 - \alpha_1,$$

so ergibt sich, daß die durch das Symbol $(\alpha_2 - \alpha_1)$ angedeutete *Subtraktion* im Falle $\alpha_2 > \alpha_1$ innerhalb des Gebietes der positiven rationalen Zahlen *ausführbar* ist und daß wir ein „*Differenzensymbol*" von der Form $(\alpha_2 - \alpha_1)$ (wo $\alpha_2 > \alpha_1$) als *neues Zeichen* für eine wirklich vorhandene *positive rationale* Zahl ansehen können (s. Gl. (2)), welche im übrigen der Beziehung genügt:

$$(4) \qquad (\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 = \alpha_2.$$ [1]

Ein *solches* Differenzensymbol soll dann ausdrücklich als ein *positives* bezeichnet werden.

Um nun durch passende Verallgemeinerung dieser Differenzensymbole die Subtraktion rationaler Zahlen in *jedem* Falle ausführbar zu machen, schlagen wir genau denselben Weg ein, der uns bei den analogen Betrachtungen über die *Division* von den uneigentlichen Brüchen zu den allgemeinen positiven rationalen Zahlen führte, und werden uns daher (vgl. § 7, Nr. 1, am Schlusse) mit der Beantwortung der folgenden Fragen beschäftigen.

1) Wie entscheidet man, ob zwei Symbole der betrachteten Art, $(\alpha_2 - \alpha_1)$ und $(\beta_2 - \beta_1)$, als *gleich* anzusehen sind, d. h. *dieselbe* positive rationale Zahl vorstellen, bzw. welches der beiden Symbole als *kleiner* oder *größer* zu gelten hat, d. h. die *kleinere* oder *größere* Zahl vorstellt?

2) Wie lassen sich *Summe* und *Produkt* zweier in der Form $(\alpha_2 - \alpha_1)$, $(\beta_2 - \beta_1)$ vorgelegten positiven rationalen Zahlen durch Symbole dieser Art darstellen?

2. Satz I. *Es ist:*

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} (\mathrm{a}) \ \alpha_2 - \alpha_1 = \beta_2 - \beta_1, & \textit{wenn:} \quad \alpha_2 + \beta_1 = \alpha_1 + \beta_2, \textit{ und umgekehrt,} \\ (\mathrm{b}) \ \alpha_2 - \alpha_1 \lesseqgtr \beta_2 - \beta_1, & \textit{je nachdem:} \quad \alpha_2 + \beta_1 \lesseqgtr \alpha_1 + \beta_2, \textit{ und umgekehrt.} \end{cases}$$

Beweis. Aus der Voraussetzung

$$\alpha_2 + \beta_1 = \alpha_1 + \beta_2$$

ergibt sich durch Einsetzen der Beziehungen (s. Gl. (4)):

---

1) Es ist stets

$$(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 > (\alpha_2 - \alpha_1)$$

(s. § 8, S. 46, Gl. (3)), also nach Gl. (4) des Textes:

$$(\alpha_2 - \alpha_1) < \alpha_2$$

(d. h. gerade so, wie für natürliche Zahlen; vgl. S. 31, Fußn. 3).

(5) $$\alpha_2 = (\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1, \quad \beta_2 = (\beta_2 - \beta_1) + \beta_1$$
die folgende:
$$(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_1 + (\beta_2 - \beta_1) + \beta_1,$$
also, wie behauptet:
$$\alpha_2 - \alpha_1 = \beta_2 - \beta_1.$$

Umgekehrt geht aus dieser letzten Beziehung durch Addition von $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_1 + \beta_1$ die vorhergehende und sodann durch Benutzung der Gleichungen (5) die Anfangsgleichung hervor.

Analog ergeben sich die auf die Voraussetzungen $\alpha_2 + \beta_1 \lessgtr \alpha_1 + \beta_2$ bezüglichen Behauptungen bzw. deren Umkehrung, wenn man in den vorstehenden Beziehungen, abgesehen von den Gleichungen (5), das Gleichheitszeichen durch das Zeichen $<$ oder $>$ ersetzt.

Zusatz. Aus (Ia) folgt speziell, wenn γ eine ganz beliebige positive rationale Zahl bedeutet:

(6) $$(\alpha_2 + \gamma) - (\alpha_1 + \gamma) = \alpha_2 - \alpha_1 \quad (\text{wegen: } \alpha_2 + \gamma + \alpha_1 = \alpha_1 + \gamma + \alpha_2).$$

Ist $\delta < \alpha_1$ (also auch $< \alpha_2$), so hat man auch:

(7) $$(\alpha_2 - \delta) - (\alpha_1 - \delta) = \alpha_2 - \alpha_1,$$

wie man erkennt, wenn man in dem Symbol $\alpha_2 - \alpha_1$
$$\alpha_2 = (\alpha_2 - \delta) + \delta,$$
$$\alpha_1 = (\alpha_1 - \delta) + \delta$$
einführt und sodann die in Gl. (6) enthaltene Eigenschaft benützt.

Zu jedem positiven Differenzensymbol $(\alpha_2 - \alpha_1)$ lassen sich also unbegrenzt viele gleichgeltende herstellen.

3. Satz II. *Um die Summe zweier positiver Differenzensymbole durch ein Symbol gleicher Art darzustellen, gilt die Formel:*

(II) $$(\alpha_2 - \alpha_1) + (\beta_2 - \beta_1) = ((\alpha_2 + \beta_2) - (\alpha_1 + \beta_1)).$$

Beweis. Addiert man $\alpha_1 + \beta_1$ zur *linken* Seite von Gl. (II), so ergibt sich:
$$(\alpha_2 - \alpha_1) + (\beta_2 - \beta_1) + (\alpha_1 + \beta_1) = ((\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1) + ((\beta_2 - \beta_1) + \beta_1)$$
$$= \alpha_2 + \beta_2.$$
Ebenso durch Addition von $\alpha_1 + \beta_1$ zur *rechten* Seite von Gl. (II):
$$((\alpha_2 + \beta_2) - (\alpha_1 + \beta_1)) + (\alpha_1 + \beta_1) = \alpha_2 + \beta_2.$$
Hiernach findet man:
$$(\alpha_2 - \alpha_1) + (\beta_2 - \beta_1) + (\alpha_1 + \beta_1) = ((\alpha_2 + \beta_2) - (\alpha_1 + \beta_1)) + (\alpha_1 + \beta_1)$$
und somit schließlich, wie behauptet:
$$(\alpha_2 - \alpha_1) + (\beta_2 - \beta_1) = ((\alpha_2 + \beta_2) - (\alpha_1 + \beta_1)).$$

4. Satz III. *Zur Darstellung des Produktes zweier positiver Differenzensymbole durch ein Symbol gleicher Art dient die Formel:*

$$\text{(III)} \qquad (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1) = (\alpha_2\beta_2 + \alpha_1\beta_1) - (\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2).$$

Beweis. Aus

$$(\beta_2 - \beta_1) + \beta_1 = \beta_2$$

folgt durch Multiplikation mit einer beliebigen positiven rationalen Zahl γ:

$$\gamma \cdot (\beta_2 - \beta_1) + \gamma\beta_1 = \gamma\beta_2,$$

also:

$$\gamma \cdot (\beta_2 - \beta_1) = \gamma\beta_2 - \gamma\beta_1,$$

d. h. für ein solches Produkt gilt das distributive Gesetz.[1] Setzt man hier: $\gamma = (\alpha_2 - \alpha_1)$, so folgt zunächst:

$$(\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1) = (\alpha_2 - \alpha_1)\beta_2 - (\alpha_2 - \alpha_1)\beta_1,$$

also durch nochmalige Anwendung des distributiven Gesetzes auf die beiden Glieder der rechten Seite:

$$(\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1) = (\alpha_2\beta_2 - \alpha_1\beta_2) - (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_1).$$

Wendet man zur Umformung der rechten Seite die Gl. (6) in der Weise an, daß man die dort mit γ bezeichnete Zahl durch $(\alpha_1\beta_2 + \alpha_1\beta_1)$ ersetzt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}(\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1) = ((\alpha_2\beta_2 - \alpha_1\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_1\beta_1))& \\ - ((\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_1) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_1\beta_1))&\end{aligned}$$

und somit schließlich, wie behauptet:

$$(\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1) = (\alpha_2\beta_2 + \alpha_1\beta_1) - (\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2).$$

§ 11. Verallgemeinerte Differenzensymbole. — Vollständige Erledigung des Subtraktionsproblems.

1. Wir führen nun alle möglichen Symbole von der Form $(\alpha - \alpha')$ ein, wo α und α' zwei ganz beliebige positive rationale Zahlen bedeuten, und werden, zur Vermeidung eines Widerspruches mit unseren bisherigen Bezeichnungen für die *Subtraktion*, durch passende Rechnungsregeln bewerkstelligen, daß das Symbol $(\alpha - \alpha')$ gerade so, wie im Falle $\alpha > \alpha'$, auch für $\alpha \leqq \alpha'$ als Lösung des Subtraktionsproblems $\xi + \alpha' = \alpha$ (siehe Gl. (1) des vorigen Paragraphen) erscheint.

Diese Symbole sind, solange $\alpha > \alpha'$, keine anderen, als die bisher betrachteten *positiven* und, wie bemerkt, als *andere Zeichen* für bereits

---

1) Vgl. S. 31, Fußn. 4.

vorhandene rationale Zahlen verwendbar. Sie sind dagegen, falls $\alpha \leqq \alpha'$, vollkommen *neue* Zeichenverbindungen, die wir jetzt dadurch zu neuen *Zahlen* machen wollen, daß wir durch geeignete Regeln sowohl ihre *Reihenfolge* untereinander, wie auch ihre Stellung zu den bereits vorhandenen Zahlen festsetzen, sodann die grundlegenden Rechnungsoperationen der *Addition* und *Multiplikation* auf das so erweiterte Zahlengebiet in möglichster Übereinstimmung mit den bisherigen Festsetzungen und ohne mit diesen in irgendwelchen Widerspruch zu geraten, übertragen. Dieses Ziel wird erreicht, wenn wir die im vorigen Paragraphen unter (I) bis (III) für den Fall $\alpha > \alpha'$ aufgestellten Beziehungen, die sich dort als direkte Übersetzungen der für positive rationale Zahlen bereits bestehenden Regeln in die neue Bezeichnungsweise ergeben hatten, nunmehr auch für die Fälle $\alpha \leqq \alpha'$ als *Definition* der *Gleichheit* oder *Ungleichheit*, sowie der *Addition* und *Multiplikation* gelten lassen. Wir setzen also fest:

Es ist:

$$\text{(I)}\begin{cases}\text{(a)}\quad (\alpha-\alpha')=(\beta-\beta'), & \textit{wenn:}\quad \alpha+\beta'=\alpha'+\beta,\quad \textit{und umgekehrt,}\\ \text{(b)}\quad (\alpha-\alpha')\lesseqgtr(\beta-\beta'), & \textit{je nachdem:}\quad \alpha+\beta'\lesseqgtr\alpha'+\beta,\quad \textit{und umgekehrt.}\end{cases}$$

$$\text{(II)}\qquad \textit{Es ist:}\quad (\alpha-\alpha')+(\beta-\beta')=((\alpha+\beta)-(\alpha'+\beta')).$$

$$\text{(III)}\qquad \textit{Es ist:}\quad (\alpha-\alpha')(\beta-\beta')=((\alpha\beta+\alpha'\beta')-(\alpha\beta'+\alpha'\beta)).$$

Die hierin liegende Erweiterung des Geltungsbereiches der im vorigen Paragraphen ebenfalls mit (I) bis (III) bezeichneten Formeln läßt offenbar die bisher gewonnenen Regeln völlig unberührt, während sie den im Falle $\alpha \leqq \alpha'$ bzw. $\beta \leqq \beta'$ neu hinzutretenden Symbolen im Sinne der in § 1 gegebenen Definition *Zahl*charakter verleiht.

Bevor wir die obigen Regeln im einzelnen einer genaueren Prüfung unterziehen, sei allgemein bemerkt, daß dieselben auch die entsprechenden Beziehungen zwischen *beliebigen Differenzensymbolen* und *positiven rationalen Zahlen* vollständig bestimmen, da es ja freisteht, jede positive rationale Zahl α durch ein Differenzensymbol von der Form $((\alpha+\gamma)-\gamma)$ zu ersetzen, wo für γ jede beliebige positive rationale Zahl gewählt werden kann.

2. Zur Vervollständigung der in (Ia) aufgestellten Definition der *Gleichheit* hat man zu zeigen, daß dieselbe widerspruchsfrei ist, daß also aus den Voraussetzungen

$$(\alpha-\alpha')=(\beta-\beta'),\quad (\beta-\beta')=(\gamma-\gamma')$$

auch allemal folgt:

$$(\alpha-\alpha')=(\gamma-\gamma').$$

Nun besagen die obigen Voraussetzungen nach (Ia), daß:

$$\alpha+\beta'=\alpha'+\beta,\quad \beta+\gamma'=\beta'+\gamma,$$

woraus durch Addition folgt:

$$\alpha + \beta' + \beta + \gamma' = \alpha' + \beta + \beta' + \gamma,$$

also:

$$\alpha + \gamma' = \alpha' + \gamma$$

und somit schließlich, wiederum mit Benutzung von (Ia), wie behauptet:

$$(\alpha - \alpha') = (\gamma - \gamma').$$

In ganz analoger Weise ergibt sich aus den Voraussetzungen:

$$(\alpha - \alpha') < (\beta - \beta'), \quad (\beta - \beta') \leqq (\gamma - \gamma'),$$

oder auch:

$$(\alpha - \alpha') \leqq (\beta - \beta'), \quad (\beta - \beta') < (\gamma - \gamma')$$

allemal die Folgerung:

$$(\alpha - \alpha') < (\gamma - \gamma'),$$

sodaß also durch die Definition (Ib) die Sukzession aller möglichen, aus positiven Zahlen gebildeten Differenzensymbole eindeutig und widerspruchslos bestimmt ist.[1])

Nach (Ia) hat man insbesondere:

(1) $$(\alpha' - \alpha) = (\beta' - \beta), \quad \text{wenn:} \quad (\alpha - \alpha') = (\beta - \beta'),$$

und umgekehrt; dagegen nach (Ib):

(2) $$\begin{cases} (\alpha' - \alpha) > (\beta' - \beta), & \text{wenn:} \quad (\alpha - \alpha') < (\beta - \beta'), \\ (\alpha' - \alpha) < (\beta' - \beta), & \text{wenn:} \quad (\alpha - \alpha') > (\beta - \beta'), \end{cases}$$ und umgekehrt.

Aus (Ia) folgt noch, daß bei jeder Wahl der positiven rationalen Zahl γ:

(3) $$((\alpha + \gamma) - (\alpha' + \gamma)) = (\alpha - \alpha')$$

und daß, mit der vorläufigen Beschränkung $\gamma < \alpha$ und $\gamma < \alpha'$, auch[2]):

(4) $$((\alpha - \gamma) - (\alpha' - \gamma)) = (\alpha - \alpha').$$

Zu jedem *beliebigen* Differenzensymbol gibt es also (gerade wie zu jedem

---

1) Insbesondere hat man ohne jede Einschränkung:

$$(\alpha - \alpha') < (\beta - \beta'),$$

wenn $\alpha < \alpha'$, $\beta > \beta'$.

2) Da infolge der gemachten Einschränkung $(\alpha - \gamma)$ und $(\alpha' - \gamma)$ *positive* Symbole sind, so hat man nach § 10 S. 54, Gl. (4):

$$(\alpha - \gamma) + \gamma = \alpha, \quad \alpha' = (\alpha' - \gamma) + \gamma,$$

also durch Addition:

$$(\alpha - \gamma) + \gamma + \alpha' = (\alpha' - \gamma) + \gamma + \alpha,$$

oder auch:

$$(\alpha - \gamma) + \alpha' = (\alpha' - \gamma) + \alpha,$$

woraus dann nach (Ia) die Richtigkeit von Gl. (4) hervorgeht.

positiven) unbegrenzt viele ihm gleiche, nämlich diejenigen von der Form der linken Seiten von Gl. (3) und (4). Es läßt sich aber auch zeigen, daß dies alle überhaupt möglichen sind, daß also jedes mit $(\alpha - \alpha')$ gleiche Symbol $(\beta - \beta')$ in einer der beiden Formen (3), (4) enthalten sein muß. Ist etwa zunächst $\beta > \alpha$, so kann gesetzt werden:

$$\beta = \alpha + \gamma$$

und man hat:

$$(\alpha - \alpha') = ((\alpha + \gamma) - \beta'),$$

also nach (Ia):

$$\alpha + \beta' = \alpha' + \alpha + \gamma$$

und somit schließlich:

$$\beta' = \alpha' + \gamma.$$

Ist dagegen $\beta < \alpha$, so findet man, wegen $\alpha > \beta$, durch Anwendung des soeben gefundenen Ergebnisses:

$$\alpha = \beta + \gamma, \quad \alpha' = \beta' + \gamma \quad (\text{wo: } \gamma < \alpha \text{ und } \gamma < \alpha'),$$

und somit:

$$\beta = \alpha - \gamma, \quad \beta' = \alpha' - \gamma.$$

Setzt man in (3) und (4) $\alpha' = \alpha$, so folgt noch:

(5) $$((\alpha \pm \gamma) - (\alpha \pm \gamma)) = (\alpha - \alpha),$$

d. h. alle Symbole von der Form $(\alpha - \alpha)$ sind bei beliebiger Wahl der positiven rationalen Zahl α einander gleich (wie sich übrigens auch ganz unmittelbar durch Anwendung von (Ia) ergeben haben würde).

3. Um die Definitionsformel der *Addition*

(II) $$(\alpha - \alpha') + (\beta - \beta') = ((\alpha + \beta) - (\alpha' + \beta'))$$

zu einer vollständig einwandfreien zu machen, wäre wiederum noch zu zeigen, daß die rechte Seite ungeändert bleibt, wenn man $(\alpha - \alpha')$, $(\beta - \beta')$ durch irgendwelche gleichgeltende Symbole $(\alpha_1 - \alpha_1')$, $(\beta_1 - \beta_1')$ ersetzt. Da nun aus

$$(\alpha - \alpha') = (\alpha_1 - \alpha_1') \quad \text{folgt:} \quad \alpha + \alpha_1' = \alpha' + \alpha_1,$$
$$(\beta - \beta') = (\beta_1 - \beta_1') \quad \text{„} \quad \beta + \beta_1' = \beta' + \beta_1,$$

so ergibt sich durch Addition:

$$\alpha + \beta + \alpha_1' + \beta_1' = \alpha' + \beta' + \alpha_1 + \beta_1,$$

und dies ist nach (Ia) gerade die notwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen der Beziehung:

$$((\alpha + \beta) - (\alpha' + \beta')) = ((\alpha_1 + \beta_1) - (\alpha_1' + \beta_1')),$$

sodaß also schließlich:

(6) $$(\alpha - \alpha') + (\beta - \beta') = (\alpha_1 - \alpha_1') + (\beta_1 - \beta_1').$$

Als besonderer Fall ergibt sich hieraus:

(7) $(\alpha-\alpha')+(\beta-\beta')=(\alpha-\alpha')+(\beta_1-\beta_1')$, wenn: $(\beta-\beta')=(\beta_1-\beta_1')$.

Dieses Resultat ist wiederum umkehrbar. Besteht nämlich die *erste* dieser beiden Gleichungen, so hat man nach (II):

$$((\alpha+\beta)-(\alpha'+\beta'))=((\alpha+\beta_1)-(\alpha'+\beta_1')),$$

also nach (Ia):

$$\alpha+\beta+\alpha'+\beta_1'=\alpha'+\beta'+\alpha+\beta_1, \quad \beta+\beta_1'=\beta'+\beta_1,$$

also schließlich:

$$(\beta-\beta')=(\beta_1-\beta_1').$$

In analoger Weise ergibt sich mit Benutzung von (Ib):

$$(8)\quad \begin{cases} (\alpha-\alpha')+(\beta-\beta')\lesseqgtr(\alpha-\alpha')+(\beta_1-\beta_1'), \\ \text{je nachdem:}\quad (\beta-\beta')\lesseqgtr(\beta_1-\beta_1'), \quad \text{und umgekehrt.} \end{cases}$$

Die rechte Seite der Formel (II) läßt sodann ohne weiteres erkennen, daß die betreffende Addition *kommutativ* ist.

Bildet man ferner:

$$((\alpha-\alpha')+(\beta-\beta'))+(\gamma-\gamma')=((\alpha+\beta)-(\alpha'+\beta'))+(\gamma-\gamma')$$
$$=((\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha'+\beta'+\gamma')),$$

so zeigt die Beschaffenheit der rechten Seite, daß diese Addition auch *assoziativ* ist.

Schließlich bietet es offenbar keine besondere Schwierigkeit, die Addition auf eine *beliebige* Anzahl von Differenzensymbolen auszudehnen und die Beibehaltung des *kommutativen* und *assoziativen* Charakters aus den entsprechenden Eigenschaften der rechten Seite zu erkennen.

Um noch die Formel (II) auf die Addition eines Differenzensymbols $(\alpha-\alpha')$ und einer positiven rationalen Zahl β anzuwenden, hat man mit Benutzung der am Schlusse von Nr. 1 gemachten Bemerkung:

$$(\alpha-\alpha')+\beta=(\alpha-\alpha')+((\beta+\gamma)-\gamma)$$
$$=((\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha'+\gamma)),$$

also schließlich (s. Gl. (3)):

$$(9)\qquad (\alpha-\alpha')+\beta=((\alpha+\beta)-\alpha').$$

Setzt man hier speziell $\beta=\alpha'$, so ergibt sich, wegen $(\alpha+\alpha')-\alpha'=\alpha$:

$$(10)\qquad (\alpha-\alpha')+\alpha'=\alpha,$$

anders ausgesprochen: $(\alpha-\alpha')$ ist in *jedem* Falle, d. h. insbesondere auch für $\alpha'\geqq\alpha$, die Lösung des Subtraktionsproblems:

$$\xi+\alpha'=\alpha,$$

wie am Anfange dieses Paragraphen bereits angekündigt wurde.

4. Die rechte Seite der Produktformel

(III) $$(\alpha-\alpha')(\beta-\beta') = ((\alpha\beta+\alpha'\beta')-(\alpha\beta'+\alpha'\beta))$$

läßt ohne weiteres erkennen, daß diese Multiplikation *kommutativ* ist.

Um wiederum nachzuweisen, daß diese rechte Seite ungeändert bleibt, wenn man $(\alpha-\alpha')$, $(\beta-\beta')$ durch irgendwelche gleichgeltende Symbole $(\alpha_1-\alpha_1')$, $(\beta_1-\beta_1')$ ersetzt, wollen wir zunächst den Fall betrachten, daß nur eins der beiden Symbole, etwa $(\beta-\beta')$, durch ein gleichgeltendes $(\beta_1-\beta_1')$ ersetzt wird, und zugleich zeigen, daß das entsprechende Ergebnis *umkehrbar* ist, also:

Es ist:

(11) $$(\alpha-\alpha')(\beta-\beta') = (\alpha-\alpha')(\beta_1-\beta_1'), \quad \textit{wenn:} \quad (\beta-\beta') = (\beta_1-\beta_1').$$

Umgekehrt folgt aus der ersten Beziehung die zweite, außer wenn $\alpha=\alpha'$. *In diesem letzteren Falle ist:*

(12) $$(\alpha-\alpha)(\beta-\beta') = (\alpha-\alpha)(\beta_1-\beta_1'),$$

ohne daß zwischen $(\beta-\beta')$, $(\beta_1-\beta_1')$ *irgendwelche Beziehung zu bestehen braucht.*

Beweis. Ist $\alpha>\alpha'$, so ist $(\alpha-\alpha')$ eine positive rationale Zahl. Besteht nun die Voraussetzung $(\beta-\beta')=(\beta_1-\beta_1')$, so hat man nach (Ia):

$$\beta+\beta_1' = \beta'+\beta_1,$$

also durch Multiplikation mit $(\alpha-\alpha')$ (s. § 9, *Gleichungen* (2), S. 51):

(13) $$(\alpha-\alpha')\beta+(\alpha-\alpha')\beta_1' = (\alpha-\alpha')\beta'+(\alpha-\alpha')\beta_1,$$

also mit Anwendung der nach § 10, Nr. 4 für das *positive* Differenzensymbol $(\alpha-\alpha')$ bestehenden *Distributivität:*

$$(\alpha\beta-\alpha'\beta)+(\alpha\beta_1'-\alpha'\beta_1') = (\alpha\beta'-\alpha'\beta')+(\alpha\beta_1-\alpha'\beta_1).$$

Hieraus mit Hilfe der Additionsformel (II):

$$((\alpha\beta+\alpha\beta_1')-(\alpha'\beta+\alpha'\beta_1')) = ((\alpha\beta'+\alpha\beta_1)-(\alpha'\beta'+\alpha'\beta_1))$$

und daher nach (Ia):

$$(\alpha\beta+\alpha\beta_1')+(\alpha'\beta'+\alpha'\beta_1) = (\alpha\beta'+\alpha\beta_1)+(\alpha'\beta+\alpha'\beta_1'),$$

anders geordnet:

$$(\alpha\beta+\alpha'\beta')+(\alpha\beta_1'+\alpha'\beta_1) = (\alpha\beta'+\alpha'\beta)+(\alpha\beta_1+\alpha'\beta_1'),$$

also wiederum nach (Ia):

(14) $$((\alpha\beta+\alpha'\beta')-(\alpha\beta'+\alpha'\beta)) = ((\alpha\beta_1+\alpha'\beta_1')-(\alpha\beta_1'+\alpha'\beta_1)),$$

und somit nach (III) schließlich, wie behauptet:

$$(\alpha-\alpha')(\beta-\beta') = (\alpha-\alpha')(\beta_1-\beta_1').$$

Da man aber von dieser Gleichung aus rückwärts schließend mit Benutzung der *Gleichungen* (2) des § 9 auch wieder zur Ausgangsgleichung $(\beta - \beta') = (\beta_1 - \beta_1')$ gelangt, so erkennt man auf diesem Wege zugleich die Richtigkeit der ausgesprochenen Umkehrung.

Ist zweitens $\alpha < \alpha'$, so wird $(\alpha' - \alpha)$ eine positive rationale Zahl und man findet zunächst auf Grund des soeben bewiesenen Ergebnisses, daß:

(15) $(\alpha' - \alpha)(\beta - \beta') = (\alpha' - \alpha)(\beta_1 - \beta_1')$, wenn: $(\beta - \beta') = (\beta_1 - \beta_1')$,

und umgekehrt.

Die erste dieser Beziehungen besagt nach (III), daß:

$$((\alpha'\beta + \alpha\beta') - (\alpha\beta + \alpha'\beta')) = ((\alpha'\beta_1 + \alpha\beta_1') - (\alpha\beta_1 + \alpha'\beta_1')).$$

Gleichzeitig mit dieser Beziehung besteht aber nach (1) stets auch diejenige, welche durch Vertauschung der Klammerausdrücke innerhalb der Differenzensymbole daraus hervorgeht, d. h.

$$((\alpha\beta + \alpha'\beta') - (\alpha'\beta + \alpha\beta')) = ((\alpha\beta_1 + \alpha'\beta_1') - (\alpha'\beta_1 + \alpha\beta_1')),$$

also auch, mit Benutzung von (III), die folgende:

$$(\alpha - \alpha')(\beta - \beta') = (\alpha - \alpha')(\beta_1 - \beta_1').$$

Somit ist diese erfüllt, sobald die Beziehung $(\beta - \beta') = (\beta_1 - \beta_1')$ vorausgesetzt wird, und zieht auch umgekehrt diese letztere nach sich.

Zur Erledigung des noch ausstehenden Falles $\alpha = \alpha'$ hat man:

$$(\alpha - \alpha)(\beta - \beta') = ((\alpha\beta + \alpha\beta') - (\alpha\beta + \alpha\beta')),$$
$$(\alpha - \alpha)(\beta_1 - \beta_1') = ((\alpha\beta_1 + \alpha\beta_1') - (\alpha\beta_1 + \alpha\beta_1')).$$

Die beiden rechtsstehenden Differenzensymbole sind von der Form $(\gamma - \gamma)$, also einander gleich, ohne daß irgendwelche Voraussetzung über β, β', β_1, β_1' erforderlich ist. Danach wird also ausnahmslos

$$(\alpha - \alpha)(\beta - \beta') = (\alpha - \alpha)(\beta_1 - \beta_1'). \text{ —}$$

Da, wie soeben bewiesen:

$$(\alpha - \alpha')(\beta - \beta') = (\alpha - \alpha')(\beta_1 - \beta_1'), \quad \text{wenn: } (\beta - \beta') = (\beta_1 - \beta_1'),$$

so folgt mit Rücksicht auf die Kommutativität des Produktes, daß auch

$$(\alpha - \alpha')(\beta_1 - \beta_1') = (\alpha_1 - \alpha_1')(\beta_1 - \beta_1'), \quad \text{wenn: } (\alpha - \alpha') = (\alpha_1 - \alpha_1').$$

Durch Kombination dieser beiden Beziehungen ergibt sich also, wie bewiesen werden sollte:

(16) $$(\alpha - \alpha')(\beta - \beta') = (\alpha_1 - \alpha_1')(\beta_1 - \beta_1'), \quad \text{wenn: } \begin{cases} (\alpha - \alpha') = (\alpha_1 - \alpha_1') \\ (\beta - \beta') = (\beta_1 - \beta_1'). \text{ —} \end{cases}$$

Neben den *Gleichungen* (11) bestehen wiederum noch entsprechende *Un*gleichungen, nämlich:

Ist $\alpha > \alpha'$, *so hat man:*

(17) $(\alpha-\alpha')(\beta-\beta') \lesseqgtr (\alpha-\alpha')(\beta_1-\beta_1')$, *je nachdem:* $(\beta-\beta') \lesseqgtr (\beta_1-\beta_1')$, *und umgekehrt.*

Ist $\alpha < \alpha'$, *so hat man dagegen:*

(18) $(\alpha-\alpha')(\beta-\beta') \lesseqgtr (\alpha-\alpha')(\beta_1-\beta_1')$, *je nachdem:* $(\beta-\beta') \gtreqless (\beta_1-\beta_1')$, *und umgekehrt.*

Beweis. Im Falle $\alpha > \alpha'$ ergeben sich aus der Voraussetzung

$$(\beta-\beta') \lesseqgtr (\beta_1-\beta_1') \quad \text{d. h.} \quad \beta+\beta_1' \lesseqgtr \beta'+\beta_1$$

genau so, wie sich oben die *Gleichungen* (13), (14) aus der entsprechenden *Gleichungs*voraussetzung ergaben, die entsprechenden *Ungleichungen*, also schließlich wie behauptet:

$$(\alpha-\alpha')(\beta-\beta') \lesseqgtr (\alpha-\alpha')(\beta_1-\beta_1'), \text{ je nachdem: } (\beta-\beta') \lesseqgtr (\beta_1-\beta_1').$$

Ebenso erhält man durch Rückwärtsschließen mit Benutzung der *Ungleichungen* (2) des § 9 auch die Umkehrbarkeit dieses Ergebnisses.

Im Falle $\alpha < \alpha'$ folgt hieraus zunächst, wenn man noch die Reihenfolge der Zeichen $\lesseqgtr$ vertauscht:

$$(\alpha'-\alpha)(\beta-\beta') \gtreqless (\alpha'-\alpha)(\beta_1-\beta_1'), \text{ je nachdem: } (\beta-\beta') \gtreqless (\beta_1-\beta_1'),$$

und umgekehrt.

Durch Anwendung der Produktformel (III) geht das erste Ungleichungspaar in das folgende über:

$$((\alpha'\beta+\alpha\beta')-(\alpha\beta+\alpha'\beta')) \gtreqless ((\alpha'\beta_1+\alpha\beta_1')-(\alpha\beta_1+\alpha'\beta_1')),$$

welches nach Formel (2) das folgende nach sich zieht (bei welchem die Reihenfolge der Klammerausdrücke in den Differenzensymbolen, zugleich aber auch diejenige der Zeichen $\gtreqless$ vertauscht erscheint):

$$((\alpha\beta+\alpha'\beta')-(\alpha'\beta+\alpha\beta')) \lesseqgtr ((\alpha\beta_1+\alpha'\beta_1')-(\alpha'\beta_1+\alpha\beta_1'))$$

und man findet somit schließlich, wie behauptet:

$$(\alpha-\alpha')(\beta-\beta') \lesseqgtr (\alpha-\alpha')(\beta_1-\beta_1'), \text{ je nachdem: } (\beta-\beta') \gtreqless (\beta_1-\beta_1'),$$

und umgekehrt.

5. Um den *assoziativen* Charakter der Multiplikationsformel (III) zu erkennen, hat man:

$$\begin{aligned}((\alpha-\alpha')(\beta-\beta'))\cdot(\gamma-\gamma') &= ((\alpha\beta+\alpha'\beta')-(\alpha\beta'+\alpha'\beta))\cdot(\gamma-\gamma')\\ &= ((\alpha\beta\gamma+\alpha'\beta'\gamma+\alpha\beta'\gamma'+\alpha'\beta\gamma')\\ &\qquad -(\alpha\beta\gamma'+\alpha'\beta'\gamma'+\alpha\beta'\gamma+\alpha'\beta\gamma)),\end{aligned}$$

und andererseits:

$$\begin{aligned}(\alpha-\alpha')\cdot((\beta-\beta')(\gamma-\gamma')) &= (\alpha-\alpha')\cdot((\beta\gamma+\beta'\gamma')-(\beta\gamma'+\beta'\gamma))\\ &= ((\alpha\beta\gamma+\alpha\beta'\gamma'+\alpha'\beta\gamma'+\alpha'\beta'\gamma)\\ &\qquad -(\alpha\beta\gamma'+\alpha\beta'\gamma+\alpha'\beta\gamma+\alpha'\beta'\gamma')),\end{aligned}$$

wobei das zweite Resultat sich lediglich durch die Anordnung der Summanden innerhalb der Klammern von dem ersten unterscheidet, also damit zusammenfällt.

In analoger Weise hat man zur Feststellung des *distributiven* Charakters:

$$\begin{aligned}(\alpha-\alpha')\{(\beta-\beta')+(\gamma-\gamma')\} &= (\alpha-\alpha')((\beta+\gamma)-(\beta'+\gamma'))\\ &= ((\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha'\beta'+\alpha'\gamma')\\ &\qquad -(\alpha\beta'+\alpha\gamma'+\alpha'\beta+\alpha'\gamma)),\end{aligned}$$

und andererseits:

$$\begin{aligned}(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')+(\alpha-\alpha')(\gamma-\gamma') &= ((\alpha\beta+\alpha'\beta')-(\alpha\beta'+\alpha'\beta))\\ &\qquad +((\alpha\gamma+\alpha'\gamma')-(\alpha\gamma'+\alpha'\gamma))\\ &= ((\alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha\gamma+\alpha'\gamma')\\ &\qquad -(\alpha\beta'+\alpha'\beta+\alpha\gamma'+\alpha'\gamma)),\end{aligned}$$

sodaß auch hier die beiden Resultate schließlich zusammenfallen.

Weiter ergibt sich dann ohne besondere Schwierigkeit, daß sich die Multiplikation auf Grund der definierenden Formel (III) auch auf *beliebig viele* Differenzensymbole unter Beibehaltung des *kommutativen* und *assoziativen* Charakters ausdehnen läßt.

6. In Nr. 3 (s. Gl. (10)) wurde gezeigt, daß durch Aufnahme der (aus zwei positiven rationalen Zahlen zusammengesetzten) *Differenzensymbole* in das System der zulässigen Zahlzeichen die *Subtraktion* zweier positiver rationaler Zahlen α, α' stets *ausführbar* wird. Wir wollen zeigen, daß dies auch dann noch der Fall ist, wenn an die Stelle von α und α' zwei ganz beliebige Differenzensymbole treten, mit anderen Worten, daß eine Gleichung von der Form:

$$(\xi-\xi')+(\beta-\beta')=(\alpha-\alpha') \tag{19}$$

stets eine Lösung $(\xi-\xi')$ besitzt. Wendet man nämlich auf die linke Seite die Additionsformel (II) an, so folgt zunächst:

$$((\xi+\beta)-(\xi'+\beta'))=(\alpha-\alpha'),$$

also nach (Ia):

$$(\xi+\beta)+\alpha'=\alpha+(\xi'+\beta'),$$

anders geordnet:

$$\xi+(\alpha'+\beta)=\xi'+(\alpha+\beta')$$

und somit wiederum nach (Ia):

(20) $$(\xi-\xi')=((\alpha+\beta')-(\alpha'+\beta)),$$

und man erkennt mit Benützung von (II), S. 57 und Gl. (3), S. 58, daß das rechts stehende Differenzensymbol in der Tat der Forderung (19) genügt.

Bezeichnet man also die Lösung der Gleichung (19) nach Analogie unserer bisherigen Festsetzungen in folgender Weise:

(21) $$(\xi-\xi')=(\alpha-\alpha')-(\beta-\beta'),$$ [1]

so ergibt sich für die Ausführung der hiermit angedeuteten *Subtraktion* die Vorschrift:

(IV) $$(\alpha-\alpha')-(\beta-\beta')=((\alpha+\beta')-(\alpha'+\beta)).$$

Vergleicht man diese Formel mit der folgenden, unmittelbar aus der Definitionsformel (II) für die Addition hervorgehenden:

$$(\alpha-\alpha')+(\beta'-\beta)=((\alpha+\beta')-(\alpha'+\beta)),$$

so ergibt sich, daß auch die Beziehung besteht:

(IVa) $$(\alpha-\alpha')-(\beta-\beta')=(\alpha-\alpha')+(\beta'-\beta),$$

wonach also die *Subtraktion* zweier Differenzensymbole auf die *Addition* zweier solcher zurückgeführt werden kann und umgekehrt.

§ 12. Einführung der Null und der negativen rationalen Zahlen. — Absoluter Betrag. — Die vier Spezies im Gebiete der rationalen Zahlen.

1. Vermöge der Bereicherung, welche unser Zahlvorrat durch die Einführung der allgemeinen Differenzensymbole $(\alpha-\alpha')$ erfahren hat, ist zwar die Subtraktion innerhalb dieses Zahlgebietes stets eindeutig ausführbar geworden. Immerhin leidet das so geschaffene Zeichensystem noch an einer merklichen Unvollkommenheit. Während nämlich im Falle $\alpha>\alpha'$ zum Ersatz aller gleichgeltenden Symbole $(\alpha-\alpha')$ ein *einfacheres*

1) Man bemerke, daß als rechte Seite dieser Gleichung *im allgemeinen* noch keins der bisher zugelassenen Differenzensymbole erscheint. Dies wäre nur dann der Fall, wenn $\alpha>\alpha'$, $\beta>\beta'$; sodaß $(\alpha-\alpha')$, $(\beta-\beta')$ positive rationale Zahlen vorstellen, d. h. wenn es sich um den bereits am Schlusse von Nr. 3 erledigten Spezialfall der Subtraktion handelt.

Zeichen in Gestalt einer bestimmten *positiven rationalen* Zahl vorhanden ist, so findet etwas ähnliches bis jetzt nicht statt, falls $\alpha \leqq \alpha'$. Es muß offenbar auch hier wünschenswert erscheinen, jeder Klasse von unbegrenzt vielen gleichgeltenden Symbolen entweder ein *besonders einfach* geratenes als *Repräsentanten* zu entnehmen, etwa analog der *reduzierten* Form einer Klasse gleicher Brüche, oder aber ihr ein *neues einfacheres Zeichen* zuzuordnen, welches dann die Rolle eines solchen Repräsentanten innerhalb des geordneten Zahlensystems zu übernehmen hätte. Die von uns anzuwendende Methode beruht auf einer Kombination dieser beiden Möglichkeiten. Indem wir zunächst den erstgenannten Weg einschlagen, werden wir schließlich zu einer besonders einfachen und naturgemäßen Auswahl der für die nicht positiven Differenzensymbole einzuführenden Ersatzzeichen gelangen, welche insbesondere die zwischen zwei Symbolen von der Form $(\alpha-\alpha')$ und $(\alpha'-\alpha)$ herrschende *Symmetrie* zu charakteristischem Ausdrucke bringen und überdies gestatten wird, auch noch die bisher nur für *positive* Zahlen erledigte *Division* (mit einer einzigen Ausnahme) den innerhalb des nunmehrigen Zahlengebietes stets eindeutig ausführbaren Rechnungsoperationen hinzuzufügen.

Anknüpfend an die Einführungsart der *reduzierten Brüche* (s. § 8, Nr. 2, S. 44), deren definierende Eigenschaft darin bestand, unter allen gleichen Brüchen den *kleinsten* Zähler und Nenner zu besitzen, könnte man zunächst darauf ausgehen, unter allen gleichen Symbolen $(\alpha-\alpha')$ (wo $\alpha' \geqq \alpha$) dasjenige ausfindig zu machen, bei welchem sowohl α, als α' eine *möglichst kleine* Zahl ist. Denkt man sich α und α' zunächst beliebig (nur $\alpha' \geqq \alpha$) angenommen, so hat man nach § 11, Gl. (4), S. 58, falls $\varepsilon < \alpha$:

$$(\alpha-\alpha') = ((\alpha-\varepsilon)-(\alpha'-\varepsilon)),$$

und es ist somit ersichtlich, daß man zu jedem Symbole $(\alpha-\alpha')$ immer solche angeben kann, bei denen α und α' durch *kleinere* Zahlen ersetzt sind. Insbesondere wird der erste Bestandteil $(\alpha-\varepsilon)$ *unbegrenzt* verkleinert werden können, indem man ε immer näher an α heranrücken läßt. Da es aber *keine kleinste positive* rationale Zahl gibt (s. S. 50), so erscheint die Existenz eines vollkommenen Analogons zu den reduzierten Brüchen zunächst ausgeschlossen. Dagegen würde man offenbar Aussicht haben, dieser Analogie möglichst nahe zu kommen, wenn man geradezu $\varepsilon = \alpha$ setzt: allein das auf diese Weise sich ergebende Symbol

$$((\alpha-\alpha)-(\alpha'-\alpha))$$

gehört in Wahrheit nicht mehr vollständig dem bisher ausschließlich betrachteten Typus an, da dasselbe als ersten Bestandteil *nicht* eine positive rationale Zahl, sondern das (allerdings schon in unseren *Zahl*vorrat auf-

genommene) Symbol $(\alpha-\alpha)$ enthält. Ehe wir dieses Ergebnis weiter verfolgen, wird es offenbar zweckmäßig sein, die Natur der in dem vorliegenden Zusammenhange gewissermaßen *als Ersatz für die fehlende kleinste positive rationale Zahl* zum Vorschein kommenden Zahl $(\alpha-\alpha)$ genauer zu untersuchen, ein neues einfaches Zeichen dafür einzuführen und durch passende Spezialisierung der definierenden Beziehungen (I) bis (IV) des vorigen Paragraphen die entsprechenden Rechnungsregeln festzustellen.

2. Wie bereits am Schlusse von Nr. 2 des vorigen Paragraphen bemerkt wurde, sind alle Symbole von der Form $(\alpha-\alpha)$, unabhängig von der Wahl der positiven rationalen Zahl α, einander *gleich*, stellen also *dieselbe Zahl* vor. Für diese Zahl führen wir jetzt das *neue Zeichen* 0 („*Null*“) ein, wir *definieren* dasselbe also durch die Formel:

(1a) $$0=(\alpha-\alpha)=(\beta-\beta)=(\gamma-\gamma)=\cdots,$$

unter $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ jede beliebige positive rationale Zahl verstanden. Die sonstigen Beziehungen dieser Zahl 0 zu den verschiedenen Elementen unseres gesamten Zahlvorrats (einschließlich der 0 selbst) sind alsdann durch die im vorigen Paragraphen eingeführten Definitionen (Ib)—(III), sowie der daraus hergeleiteten, die Subtraktion betreffenden Formel (IV) vollständig festgelegt und ergeben sich aus diesen, indem man $\beta'=\beta$, eventuell nach Bedarf auch $\alpha'=\alpha$ setzt. Man findet (mit Hinzunahme der für die Addition und Multiplikation bestehenden Kommutativität) auf diese Weise zunächst:

Aus (Ib) $(\alpha-\alpha')\lesseqgtr(\beta-\beta)$, *je nachdem:* $\alpha+\beta\lesseqgtr\alpha'+\beta$, d.h. $\alpha\lesseqgtr\alpha'$.

Aus (II) $$\left.\begin{matrix}(\alpha-\alpha')+(\beta-\beta)\\(\beta-\beta)+(\alpha-\alpha')\end{matrix}\right\}=((\alpha+\beta)-(\alpha'+\beta))=(\alpha-\alpha').$$

Aus (III) $$\left.\begin{matrix}(\alpha-\alpha')\cdot(\beta-\beta)\\(\beta-\beta)\cdot(\alpha-\alpha')\end{matrix}\right\}=((\alpha\beta+\alpha'\beta)-(\alpha'\beta+\alpha\beta)).$$

Aus (IV) $$\left\{\begin{matrix}(\alpha-\alpha')-(\beta-\beta)=((\alpha+\beta)-(\alpha'+\beta))=(\alpha-\alpha')\\(\alpha-\alpha)-(\beta-\beta')=((\alpha+\beta')-(\alpha+\beta))=(\beta'-\beta),\end{matrix}\right.$$

also mit Einführung des Zeichens 0 (wenn wir in der letzten Gleichung der Gleichförmigkeit halber noch $(\alpha-\alpha')$ und $(\alpha'-\alpha)$ statt $(\beta-\beta')$ und $(\beta'-\beta)$ schreiben):

(1b) $(\alpha-\alpha')\lesseqgtr 0$, *je nachdem:* $\alpha\lesseqgtr\alpha'$.

(2) $(\alpha-\alpha')+0=0+(\alpha-\alpha')=(\alpha-\alpha')$.

(3) $(\alpha-\alpha')\cdot 0=0\cdot(\alpha-\alpha')=0$.

(4) $$\left\{\begin{matrix}(\alpha-\alpha')-0=(\alpha-\alpha')\\0-(\alpha-\alpha')=(\alpha'-\alpha).\end{matrix}\right.$$

Für den besonderen Fall $\alpha' = \alpha$ nehmen die Beziehungen (2)—(4) die Form an:

(5) $$0 + 0 = 0, \quad 0 \cdot 0 = 0, \quad 0 - 0 = 0.$$

Um sodann die Fälle $\alpha < \alpha'$ und $\alpha > \alpha'$ schon äußerlich durch die Bezeichnung zu trennen, wollen wir, wie bereits in § 10, ein für allemal mit (α_1, α_2), (β_1, β_2) Zahlenpaare von der Beschaffenheit bezeichnen, daß

$$\alpha_2 > \alpha_1, \quad \beta_2 > \beta_1,$$

sodaß man setzen kann:

(6) $$(\alpha_2 - \alpha_1) = \gamma, \quad (\beta_2 - \beta_1) = \delta,$$

wo γ und δ positive rationale Zahlen bedeuten.

Setzt man dann zunächst in der zweiten der Gleichungen (4) $\alpha = \alpha_2$, $\alpha' = \alpha_1$, so ergibt sich die Beziehung:

(7) $$(\alpha_1 - \alpha_2) = 0 - (\alpha_2 - \alpha_1) = 0 - \gamma.$$

Wir wollen dann schließlich, gleichwie die *Null* als *Summand* (siehe Gl. (2)) keinerlei Einfluß übt und daher ohne weiteres weggelassen werden kann, in dem vorliegenden Zusammenhange sie gleichfalls unterdrücken: wir bedienen uns also für $0 - \gamma$ der *vereinfachten Schreibweise* $-\gamma$, sodaß also nunmehr unter der Voraussetzung $\alpha_2 - \alpha_1 = \gamma$, das Symbol $(-\gamma)$ oder auch, wo ein Mißverständnis ausgeschlossen erscheint[1]): $-\gamma$ (ohne Klammer) als der gesuchte *Repräsentant* aller gleichgeltenden Symbole $(\alpha_1 - \alpha_2)$ gewonnen wird. Jede solche Zahl $(-\gamma)$ (*lies:* minus γ) wird als eine *negative* rationale Zahl bezeichnet und ist, wenn $(\alpha_2 - \alpha_1) = \gamma$, *vollständig definiert* durch die Beziehung:

(8) $$(-\gamma) = (\alpha_1 - \alpha_2)\ ^{2)},$$

da ja $(\alpha_1 - \alpha_2)$ auf Grund des bisher gesagten bereits eine wohldefinierte Zahl vorstellt.

Durch Einführung von $(\alpha_2 - \alpha_1) = \gamma$ bzw. $(\alpha_1 - \alpha_2) = (-\gamma)$ an Stelle von $(\alpha - \alpha')$ in Gl. (1b)—(4) ergeben sich für das Verhalten der

---

1) D. h. wo keine Verwechslung des lediglich zur Charakterisierung der betreffenden Zahl dienenden, mit dem Buchstaben γ untrennbar verbundenen „*Vorzeichens*" mit dem *Operationszeichen der Subtraktion* stattfinden kann (z. B. wenn man statt des *Produktes* $a(-b)$ schriebe: $a - b$). Auch pflegt man eine direkte Kollision *dieses* Minuszeichens mit einem Operationszeichen zu vermeiden und schreibt demnach:

$$a + (-b), \quad a - (-b), \quad \textit{nicht:} \quad a + - b, \quad a - - b.$$

2) Man hat also:

$$(\alpha_1 - \alpha_2) = -(\alpha_2 - \alpha_1).$$

positiven und *negativen* rationalen Zahlen zur *Null* die folgenden Beziehungen:

[1] $\gamma > 0$ $\qquad (-\gamma) < 0$

[2] $\gamma + 0 = 0 + \gamma = \gamma$ $\qquad (-\gamma) + 0 = 0 + (-\gamma) = (-\gamma)$

[3] $\gamma \cdot 0 = 0 \cdot \gamma = 0$ $\qquad (-\gamma) \cdot 0 = 0 \cdot (-\gamma) = 0$

[4] $\begin{cases} \gamma - 0 = \gamma & (-\gamma) - 0 = (-\gamma) \\ 0 - \gamma = -(\gamma) & 0 - (-\gamma) = \gamma. \end{cases}$

Darnach gelten insbesondere die folgenden Sätze:

Jede positive rationale Zahl ist größer, jede negative kleiner als Null.

Das Produkt aus einer positiven oder negativen rationalen Zahl und der Null ist Null.

3. Zwei Zahlen von der Form $(\alpha_2 - \alpha_1) = \gamma$ und $(\alpha_1 - \alpha_2) = (-\gamma)$ heißen *entgegengesetzt.* Will man den Gegensatz einer *positiven* Zahl γ zur *negativen* $(-\gamma)$ besonders prägnant hervorheben, so schreibt man gelegentlich auch $(+\gamma)$ oder $+\gamma$ statt γ (s. z. B. Ungl. (10)). Auch bedient man sich zuweilen der Bezeichnungsweise $(\pm\gamma)$ oder $\pm\gamma$, bzw. $(\mp\gamma)$ oder $\mp\gamma$, um anzudeuten, daß in dem betreffenden Zusammenhange sowohl $(+\gamma)$, als $(-\gamma)$ gewählt werden darf. Dabei hat man gewöhnlich, wenn mehrere solche Zahlen in einer Gleichung vorkommen, durchweg das obere oder durchweg das untere Vorzeichen zu wählen. Da nach Gl. (II) des vorigen Paragraphen:

$$(\alpha_2 - \alpha_1) + (\alpha_1 - \alpha_2) = ((\alpha_2 + \alpha_1) - (\alpha_1 + \alpha_2)) = 0,$$

so folgt:

(9) $$\gamma + (-\gamma) = 0.$$

Ferner hat man wegen $\alpha_1 + \beta_1 < \alpha_2 + \beta_2$ ohne irgendwelche Einschränkung:

$$(\alpha_1 - \alpha_2) < (\beta_2 - \beta_1),$$

anders geschrieben:

(10) $$-\gamma < +\delta,$$

in Worten: *Jede negative rationale Zahl ist kleiner als jede positive.*

Ist ferner:

$$(\alpha_2 - \alpha_1) < (\beta_2 - \beta_1), \quad \text{also:} \quad \gamma < \delta,$$

so hat man:

$$\alpha_2 + \beta_1 < \alpha_1 + \beta_2,$$

anders geschrieben:

$$\alpha_1 + \beta_2 > \alpha_2 + \beta_1$$

und daher:

$$(\alpha_1 - \alpha_2) > (\beta_1 - \beta_2), \quad \text{d. h.} \quad -\gamma > -\delta.$$

Durch Zusammenfassung mit Ungl. [1] ergibt sich somit, wenn $\gamma < \delta$, die folgende Sukzession:

$$(11) \qquad -\delta < -\gamma < 0 < \gamma < \delta.$$

Man bezeichnet die positive Zahl γ auch als den *absoluten Betrag* der negativen Zahl $(-\gamma)$ und schreibt nach dem Vorgange von Weierstraß:

$$(12) \qquad |-\gamma| = \gamma,$$

wo also das Zeichen $|-\gamma|$ bedeutet: *absoluter Betrag von* $(-\gamma)$.

Einer unter Umständen zweckmäßigen Gleichförmigkeit der Bezeichnung zuliebe ordnet man auch der *positiven* Zahl γ die nämliche Zahl γ, der 0 die 0 als *absoluten Betrag* zu, und schreibt demgemäß in Übereinstimmung mit der in (12) eingeführten Bezeichnungsweise:

$$(13) \qquad |+\gamma| = \gamma, \quad |0| = 0.$$

Jede von 0 verschiedene rationale Zahl ist durch ihren absoluten Betrag *allein* noch nicht bestimmt, dazu ist noch die Angabe *„ihres Vorzeichens"* erforderlich, d. h. die Angabe, ob sie eine *positive* oder *negative* Zahl sein soll. Zahlen *gleichen Vorzeichens* nennt man *gleichbezeichnet*.

Von zwei Zahlen mit *gleichem absoluten Betrage* sagt man, sie seien *„absolut genommen"* oder auch *„numerisch"* gleich. Die analogen Bezeichnungen gelten für den Fall, daß eine der beiden Zahlen einen *größeren* (bzw. *kleineren*) *absoluten Betrag* besitzt, als die andere.

Mit Benützung der vorstehenden Terminologie läßt sich das oben gefundene auf die Sukzession der negativen Zahlen bezügliche Resultat folgendermaßen formulieren:

Von zwei negativen Zahlen ist diejenige die kleinere, welche den größeren absoluten Betrag besitzt.[1])

Oder auch, wenn man, wie häufig geschieht, die Bezeichnungen „kleiner" bzw. „größer" *im Sinne der Sukzession* (11) noch ausdrücklich durch das Beiwort *„algebraisch"* charakterisiert:

Von zwei negativen Zahlen ist die numerisch größere die algebraisch kleinere (während bei positiven Zahlen die Begriffe *numerisch* und *algebraisch* größer bzw. kleiner zusammenfallen).

4. Es bleiben noch die Regeln für das Rechnen mit *negativen* bzw. mit *negativen und positiven* Zahlen zu erledigen, was offenbar lediglich darauf hinausläuft, die im vorigen Paragraphen für das Rechnen mit

---

1) Während also die *positiven* Zahlen gleichzeitig mit ihren absoluten Beträgen beständig wachsen, nehmen die negativen bei wachsenden absoluten Beträgen beständig ab.

Differenzensymbolen festgestellten Regeln in die neue Bezeichnungsweise zu übertragen.

Addition. Man hat nach (II)[1]:

$$(\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2) = ((\alpha_1 + \beta_1) - (\alpha_2 + \beta_2))$$
$$= -((\alpha_2 + \beta_2) - (\alpha_1 + \beta_1)) \text{ (s. S. 68, Fußn. 2)}$$
$$= -((\alpha_2 - \alpha_1) + (\beta_2 - \beta_1)) \text{ (nach (II))},$$

d. h.

(14) $$(-\gamma) + (-\delta) = -(\gamma + \delta).$$

Ferner folgt aus (IVa) (rückwärts gelesen):

$$(\alpha_2 - \alpha_1) + (\beta_1 - \beta_2) \doteq (\alpha_2 - \alpha_1) - (\beta_2 - \beta_1),$$

also (wenn man noch die Kommutativität der linken Seite, sowie Gl. (10) des vorigen Paragraphen (S. 60) benutzt):

(15) $$\left.\begin{matrix} \gamma + (-\delta) \\ (-\delta) + \gamma \end{matrix}\right\} = \gamma - \delta \begin{cases} = (\gamma - \delta), & \text{wenn: } \gamma > \delta \\ = -(\delta - \gamma), & \text{wenn: } \gamma < \delta. \end{cases}$$

Daß die Addition wiederum *kommutativ* und *assoziativ* ist, bedarf keines weiteren Beweises, da ja diese Eigenschaften für die zu Grunde liegenden Differenzensymbole ausdrücklich festgestellt wurden. Das analoge gilt bezüglich der Übertragbarkeit der Addition auf eine beliebige Anzahl von Summanden.

Multiplikation. Man hat, wie sich unmittelbar mit Hilfe der Definition (III) ergibt:

$$(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1),$$

also:

(16) $$(-\gamma) \cdot (-\delta) = \gamma\delta.$$

Hieraus speziell:

(16a) $$(-1) \cdot (-\delta) = \delta.$$

Ferner folgt aus (III):

$$\left.\begin{matrix} (\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_2 - \beta_1) \\ (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_1 - \beta_2) \end{matrix}\right\} = ((\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2))$$
$$= -((\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) - (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)) \text{ (S. 68, Fußn. 2)}$$
$$= -((\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1))$$

d. h.:

(17) $$\left.\begin{matrix} (-\gamma) \cdot \delta \\ \gamma \cdot (-\delta) \end{matrix}\right\} = -\gamma\delta.$$

Hieraus speziell:

(17a) $$(-1) \cdot \delta = -\delta.$$

---

1) Diese römischen Zahlen beziehen sich durchweg auf die betreffenden Formeln des vorigen Paragraphen (S. 57, 65).

Bezüglich der Erhaltung der für die Multiplikation charakteristischen Grundeigenschaften und der Übertragbarkeit der Multiplikation auf eine beliebige Anzahl von Faktoren gelten die oben im Anschluß an die Addition gemachten Bemerkungen. Hier sei nur noch der folgende, zuweilen nützliche Satz hervorgehoben, dessen Richtigkeit aus den Beziehungen (16), (17) leicht erkannt wird:

Das Produkt einer beliebigen Anzahl positiver und negativer Faktoren ist positiv oder negativ, je nachdem die Anzahl der negativen Faktoren eine gerade oder ungerade ist.

Subtraktion. Aus (IVa) ergeben sich die drei Beziehungen:

$$(\alpha_2-\alpha_1)-(\beta_1-\beta_2)=(\alpha_2-\alpha_1)+(\beta_2-\beta_1)$$
$$(\alpha_1-\alpha_2)-(\beta_2-\beta_1)=(\alpha_1-\alpha_2)+(\beta_1-\beta_2)$$
$$(\alpha_1-\alpha_2)-(\beta_1-\beta_2)=(\alpha_1-\alpha_2)+(\beta_2-\beta_1),$$

also in unsere jetzigen Bezeichnungen übersetzt:

(18) $$\gamma-(-\delta)=\gamma+\delta,$$

(19) $$(-\gamma)-\delta=(-\gamma)+(-\delta)=-(\gamma+\delta) \quad \text{(nach Gl. (14))},$$

(20) $$(-\gamma)-(-\delta)=(-\gamma)+\delta=\delta-\gamma\begin{cases}=(\delta-\gamma), & \text{wenn: } \delta>\gamma\\ =-(\gamma-\delta), & \text{wenn: } \delta<\gamma.\end{cases}$$ [1]

Division. Da die Division zweier positiver rationaler Zahlen bereits erledigt ist (§ 9, Nr. 2, S. 53), so handelt es sich nur noch um diejenigen Fälle, bei denen mindestens eine der beiden gegebenen Zahlen eine negative ist, also um die Bestimmung einer Zahl X, welche einer der folgenden drei Gleichungen genügt:

$$\text{(a)}\ (-\gamma)\cdot X=\delta, \qquad \text{(b)}\ \gamma\cdot X=-\delta, \qquad \text{(c)}\ (-\gamma)\cdot X=-\delta,$$

sodaß man nach Analogie der bisher benutzten Bezeichnungen zu setzen hätte:

$$\text{(a)}\ X=\frac{\delta}{(-\gamma)}, \qquad \text{(b)}\ X=\frac{(-\delta)}{\gamma}, \qquad \text{(c)}\ X=\frac{(-\delta)}{(-\gamma)}.$$

Ein Blick auf die Multiplikationsformeln (16) und (17) zeigt, daß den beiden ersten Gleichungen nur eine *negative*, der letzten nur eine *positive* Zahl genügen könnte, sodaß es zweckmäßig erscheint, zu substituieren:

$$\text{in (a) und (b): } X=-\xi, \qquad \text{in (c): } X=\xi,$$

wo ξ eine wesentlich *positive* Zahl bedeutet. Hierdurch nehmen die obigen drei Gleichungen die folgende Form an:

$$(-\gamma)\cdot(-\xi)=\delta, \quad \gamma\cdot(-\xi)=-\delta, \quad (-\gamma)\cdot\xi=-\delta.$$

1) Vgl. die letzte der Formeln (15).

Wendet man auf die linke Seite der ersten Gleichung die Formel (16) an und multipliziert die beiden anderen mit (-1), so folgt mit Berücksichtigung von (16a):

$$\gamma \cdot \xi = \delta, \quad \gamma \cdot \xi = \delta, \quad \gamma \cdot \xi = \delta,$$

also in jedem der drei Fälle:

$$\xi = \frac{\delta}{\gamma},$$

somit in den beiden ersten: $X = -\frac{\delta}{\gamma}$, im letzten: $X = \frac{\delta}{\gamma}$,

sodaß sich schließlich ergibt:

$$(21) \qquad \frac{\delta}{(-\gamma)} = -\frac{\delta}{\gamma}, \quad \frac{(-\delta)}{\gamma} = -\frac{\delta}{\gamma}, \quad \frac{(-\delta)}{(-\gamma)} = \frac{\delta}{\gamma}.$$

Als Resultat der fraglichen Division erscheint also in jedem Falle eine bestimmte rationale Zahl. Man erkennt auch leicht mit Hilfe des Satzes Gl. (11) des vorigen Paragraphen, daß es *nur eine* solche Lösung gibt.

Beachtet man noch, daß nach [3]:

$$\gamma \cdot 0 = 0, \quad (-\gamma) \cdot 0 = 0,$$

so gewinnt man als Ergänzung zu den Gleichungen (21) noch die folgenden:

$$(22) \qquad \frac{0}{\gamma} = 0, \quad \frac{0}{(-\gamma)} = 0.$$

Andererseits folgt aber aus $0 \cdot (\pm \gamma) = 0$, daß keine positive oder negative Zahl X existiert, welche der Gleichung genügt: $0 \cdot X = \pm \delta$ (wo δ von Null verschieden). Somit ist die Division $\frac{(\pm \delta)}{0}$ in dem vorliegenden Zahlengebiete *unausführbar* und das Symbol $\frac{(\pm \delta)}{0}$ ist sinnlos.

Man könnte dagegen zunächst versucht sein, aus der Beziehung $0 \cdot 0 = 0$ zu schließen, daß $\frac{0}{0} = 0$ sein müßte. Indessen hat man ja auch für jedes *von Null verschiedene* γ: $0 \cdot (\pm \gamma) = 0$, woraus mit dem nämlichen Rechte zu folgern wäre: $\frac{0}{0} = \pm \gamma$. Mithin hat auch das Symbol $\frac{0}{0}$ bzw. die Division von 0 durch 0 keinen bestimmten Sinn.

5. Durch die Vereinigung der *positiven und negativen rationalen Zahlen und der Null*[1]) entsteht das System der *rationalen Zahlen*, dessen einzelne Individuen wir im folgenden durch große lateinische Buchstaben: $A, B, C, \cdots$ bezeichnen wollen.

Aus den bisherigen Betrachtungen geht hervor, daß das System der rationalen Zahlen ein *geordnetes* ist, d. h. daß nach bestimmten Vor-

1) Man pflegt die *Null* auch zu den *ganzen* Zahlen zu rechnen. Doch nimmt sie offenbar innerhalb des Systems der *ganzen*, geradeso wie in demjenigen der *rationalen* Zahlen eine Sonderstellung ein.

schriften stets unzweideutig festgestellt werden kann, welcher der drei möglichen Fälle:

$$A < B, \quad A = B, \quad A > B$$

in Wahrheit stattfindet.[1])

Ferner sind die vier *„rationalen“ Rechnungsoperationen* der Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division oder, wie man kürzer zu sagen pflegt, *die vier Spezies*, mit einzigem Ausschluß der *Division durch Null*, im Gebiete der rationalen Zahlen stets eindeutig ausführbar.

Wir knüpfen hieran zunächst noch folgende Bemerkungen.

Sind A, B irgendzwei von Null verschiedene rationale Zahlen, so hat man:

$$A = |A| \text{ oder } A = -|A|, \quad B = |B| \text{ oder } B = -|B|.$$

Hiernach bestehen für die *Summe* $A + B$ die *vier* Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} &|A| + |B| \\ -&|A| + |B| = |B| - |A| \quad \text{(s. Gl. (15))} \\ &|A| + (-|B|) = |A| - |B| \quad \text{(s. Gl. (15))} \\ -&|A| + (-|B|) = -(|A| + |B|) \quad \text{(s. Gl. (14))}. \end{aligned}$$

Da ferner, wie unmittelbar erkannt wird: $|-A'| = |A'|$ und daher $\big||B| - |A|\big| = \big||A| - |B|\big|$, so bestehen für den absoluten Betrag der Summe $(A + B)$, also für $|A + B|$ die *zwei* Möglichkeiten:

$$|A| + |B|, \quad \big||A| - |B|\big|.$$

Da die erste dieser beiden Zahlen offenbar die größere ist[2]), so läßt sich die vorstehende Betrachtung in den folgenden Satz zusammenfassen:

Der absolute Betrag der Summe zweier von Null verschiedener rationaler Zahlen ist höchstens gleich der Summe und mindestens gleich der absolut genommenen Differenz ihrer absoluten Beträge. Der erste Wert wird erreicht bei gleichem, der zweite bei verschiedenem Vorzeichen der beiden Zahlen.[3])

---

1) Insbesondere bedeuten die Beziehungen:

$$A < 0 \quad \text{bzw.} \quad A > 0$$

soviel als: A ist *negativ* bzw. A ist *positiv* (s. Nr. 2, S. 69, Gl. [1]).

2) Sind α, β zwei *positive* rationale Zahlen, so hat man, wenn $\alpha > \beta$:

$$0 < \alpha - \beta < \alpha < \alpha + \beta,$$

und, wenn $\alpha < \beta$:

$$0 < \beta - \alpha < \beta < \alpha + \beta.$$

Da nun:

$$|\alpha - \beta| \begin{cases} = \alpha - \beta, & \text{wenn: } \alpha > \beta \\ = \beta - \alpha, & \text{wenn: } \alpha < \beta, \end{cases}$$

so folgt, daß in jedem Falle:

$$|\alpha - \beta| < \alpha + \beta.$$

3) In dem oben ausgeschlossenen Falle: $A = 0$ bzw. $B = 0$ hat man offenbar:

$$|A + B| = |A| + |B| = \big||A| - |B|\big|.$$

Der auf den Höchstwert des absoluten Betrages bezügliche Teil dieses Satzes läßt sich offenbar (wie übrigens durch vollständige Induktion leicht bestätigt werden kann) auf eine beliebige Anzahl von Summanden übertragen, also:

Der absolute Betrag der Summe beliebig vieler rationaler Zahlen ist höchstens gleich der Summe ihrer absoluten Beträge. Dieser Höchstwert wird dann und nur dann erreicht, wenn alle Zahlen gleichbezeichnet sind.

Für die *Differenz* zweier rationaler Zahlen gilt ein analoger Satz, wie der oben für ihre *Summe* ausgesprochene. Denn die vier für diese Differenz bestehenden Möglichkeiten, nämlich:

$$|A| - |B|$$
$$-|A| - |B| = -(|A| + |B|) \qquad \text{(s. Gl. (19))}$$
$$|A| - (-|B|) = |A| + |B| \qquad \text{(s. Gl. (18))}$$
$$-|A| - (-|B|) = -|A| + |B| = |B| - |A| \qquad \text{(s. Gl. (20))}$$

sind von den oben für die Summe festgestellten nur durch die Anordnung verschieden, und man findet:

Der absolute Betrag der Differenz zweier von Null verschiedener rationaler Zahlen ist höchstens gleich der Summe und mindestens gleich der absolut genommenen Differenz ihrer absoluten Beträge. Der erste Wert wird erreicht bei verschiedenem, der zweite bei gleichem Vorzeichen der beiden Zahlen.[1])

Auch der auf den absoluten Betrag einer Summe beliebig vieler rationaler Zahlen bezügliche Satz läßt in seinem ersten Teile noch eine Erweiterung in dem Sinne zu, daß an die Stelle beliebig vieler durch das Pluszeichen verbundener Glieder solche mit negativem Zeichen treten können, ohne das betreffende Ergebnis zu alterieren. Dies leuchtet unmittelbar ein, wenn man noch festsetzt, daß unter $(-A)$ oder $-A$, wie dies bei *positivem* A bereits der Fall ist, *stets* (d. h. also schließlich: auch wenn A *negativ* ist) die zu A *entgegengesetzte*[2]) Zahl verstanden werden soll. Alsdann läßt sich nämlich jede subtraktive Verbindung $A - B$ durch die additive $A + (-B)$ ersetzen, und man erkennt auf diese Weise ohne weiteres die Richtigkeit der Beziehung:

$$(23) \qquad |A_1 \pm A_2 \pm \cdots \pm A_n| \leqq |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

auch wenn das Zeichen $\pm$ so verstanden wird, daß in jedem einzelnen

1) Ist $A = 0$ bzw. $B = 0$, so hat man wiederum:
$$|A - B| = |A| + |B| = \big||A| - |B|\big|.$$

2) D. h. $A + (-A) = 0$, s. Nr. 3, Gl. (9) dieses Paragraphen (S. 69).

Gliede ganz nach Belieben das obere oder untere Zeichen gewählt werden darf.

6. Da sich die rationalen Zahlen A, B von den absoluten Beträgen $|A|$, $|B|$ nur durch das Vorzeichen unterscheiden können, so findet die analoge Beziehung zwischen den Produkten AB und $|A|\cdot|B|$ statt. Daraus folgt aber unmittelbar, daß

(24) $$|AB| = |A|\cdot|B|.$$

Da sich diese Schlußweise unmittelbar auf eine beliebige Anzahl von Faktoren übertragen läßt, so gilt also der Satz:

Der absolute Betrag eines Produktes beliebig vieler rationaler Zahlen ist gleich dem Produkte ihrer absoluten Beträge.

Daraus folgt, daß der absolute Betrag eines solchen Produktes, falls keiner der Faktoren *Null* ist, eine bestimmte positive Zahl sein muß. Mithin ergibt sich umgekehrt:

Ist ein Produkt gleich Null, so muß mindestens einer der Faktoren Null sein.

Ersetzt man in Gl. (24) B durch $\frac{B}{A}$ und beachtet, daß $A\cdot\frac{B}{A} = B$, so folgt zunächst:

$$|B| = |A|\cdot\left|\frac{B}{A}\right|$$

und daher:

(25) $$\left|\frac{B}{A}\right| = \frac{|B|}{|A|},$$

d. h.

Der absolute Betrag eines Quotienten ist gleich dem Quotienten der betreffenden absoluten Beträge.

Schließlich mögen hier noch die folgenden Ungleichungen angemerkt werden. Ist:

(26) $$B < B' \quad \text{bzw.} \quad B > B',$$

so hat man auch:

(27a) $$AB < AB' \quad \text{bzw.} \quad AB > AB', \quad \textit{falls} \quad A > 0.$$

Dies folgt unmittelbar aus § 11, Formel (17), S. 63 (wenn daselbst gesetzt wird: $(\alpha-\alpha') = A$, $(\beta-\beta') = B$, $(\beta_1-\beta_1') = B'$. B und B' können dabei ganz beliebige, auch verschiedene Vorzeichen besitzen).

Dagegen ergibt sich aus (26) (nach Formel (18) a. a. O.):

(27b) $$AB > AB' \quad \text{bzw.} \quad AB < AB', \quad \textit{falls} \quad A < 0.$$

Es gilt also die Regel: *Multipliziert man irgendeine Ungleichung zwischen rationalen Zahlen mit einer negativen rationalen Zahl, so ist das Zeichen $<$ durch das Zeichen $>$ zu ersetzen und umgekehrt.*

Insbesondere folgt aus den Voraussetzungen (26), wenn man $A = -1$ setzt, daß:

(28) $$-B > -B' \quad \text{bzw.} \quad -B < -B'.$$

Sind B und B' gleich bezeichnet, sodaß also $BB' > 0$, also auch $\frac{1}{BB'} > 0$, so folgt durch Multiplikation von (26) mit $\frac{1}{BB'}$:

$$\frac{1}{B'} < \frac{1}{B} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{B'} > \frac{1}{B},$$

anders geschrieben:

(29a) $$\frac{1}{B} > \frac{1}{B'} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{B} < \frac{1}{B'}.$$

Sind dagegen B und B' ungleich bezeichnet, also $\frac{1}{BB'} < 0$, so ergibt sich auf dieselbe Weise (wie übrigens auch unmittelbar aus dem Umstande hervorgeht, daß *jede* negative Zahl kleiner ist als *jede* positive):

(29b) $$\frac{1}{B} < \frac{1}{B'} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{B} > \frac{1}{B'}.$$

§ 13. Potenzen rationaler Zahlen mit ganzzahligen Exponenten.

1. Bedeutet A eine beliebige rationale, n eine natürliche Zahl, so wollen wir für das Produkt aus n gleichen Faktoren A die abgekürzte Bezeichnung einführen: A^n (in Worten: A hoch n oder A zur n^{ten}), sodaß also dieses Zeichen A^n *definiert* ist durch die Beziehung:

(1) $$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n \text{ mal}}.$$

Die Zahl A^n heißt alsdann die n^{te} *Potenz* von A, während A in diesem Zusammenhange als *Basis*, n als *Exponent* der betreffenden Potenz bezeichnet wird. Die 1te Potenz von A ist offenbar als identisch mit A zu definieren. Die 2te, 3te und 4te Potenz werden auch *Quadrat, Kubus, Biquadrat* genannt.

Auf Grund der obigen Definition[1]) ist die Potenz mit positivem

---

1) Bei dieser Definition wird von vornherein von dem Begriffe der *Anzahl* Gebrauch gemacht. Die Potenz erscheint dabei als Ergebnis einer *n mal* wiederholten Multiplikation, analog wie man ja auch die Multiplikation einer natürlichen und sogar einer beliebigen rationalen Zahl mit einer natürlichen Zahl n als eine *n mal* wiederholte Addition desselben Summanden hätte definieren können. Andererseits läßt sich auch die Potenzierung analog wie die Addition und Multiplikation *ohne* Benutzung des Anzahlbegriffs definieren, nämlich durch die Anfangsgleichung:

$$A^1 = A$$

und die Rekursionsformel:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A.$$

(und, wie sich weiter unten zeigen wird, auch mit negativem) *ganzzahligen* Exponenten nicht das Ergebnis einer neuen Rechnungsoperation, sie gehört vielmehr durchaus noch dem Kreise der *vier Spezies* an. Sie führt erst zu einer *neuen* Rechnungsoperation, sobald man auf Grund geeigneter Festsetzungen auch *nicht-ganze* Zahlen als Exponenten zuläßt.

Ist m eine zweite natürliche Zahl (die eventuell auch $= n$ sein darf), so hat man:

$$A^m \cdot A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{m \text{ mal}} \cdot \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n \text{ mal}}$$
$$= \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A \cdot A}_{(m+n) \text{ mal}}$$

und findet auf diese Weise die für das Rechnen mit Potenzen und für die weitere Ausbildung des Potenzbegriffes grundlegende Formel:

$$A^m \cdot A^n = A^{m+n}. \tag{2}$$

Durch Ausdehnung dieser Formel auf das Produkt einer beliebigen Anzahl (k) von Potenzen mit den Exponenten $n_1, n_2, \cdots, n_k$ ergibt sich die Verallgemeinerung:

$$A^{n_1} \cdot A^{n_2} \cdots A^{n_k} = A^{n_1+n_2+\cdots+n_k}, \tag{3}$$

und, wenn man sodann sämtliche Exponenten einander gleich, etwa $= n$ setzt, sodaß die linke Seite in die k^{te} Potenz von A^n übergeht:

$$(A^n)^k = A^{nk}. \tag{4}$$

Da der Exponent nk von der Reihenfolge der Zahlen n und k unabhängig ist, so findet man weiter:

$$(A^k)^n = A^{kn} = A^{nk} = (A^n)^k. \tag{4a}$$

Bedeutet auch B eine beliebige rationale Zahl, so hat man auf Grund der Definition (1) zunächst:

$$A^n \cdot B^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n \text{ mal}} \cdot \underbrace{B \cdot B \cdots B}_{n \text{ mal}}$$
$$= \underbrace{(AB) \cdot (AB) \cdots (AB)}_{n \text{ mal}}$$

und somit:

$$A^n \cdot B^n = (AB)^n. \tag{5}$$

Ersetzt man in dieser Formel B durch $\frac{1}{B}$ und beachtet, daß auf Grund

der Definition (1) und der Multiplikationsformel für Quotienten rationaler Zahlen (vgl. § 9 am Schlusse, S. 53) die Beziehung besteht:

(6) $$\left(\frac{1}{B}\right)^n = \frac{1}{B^n},$$

so folgt:

(6a) $$\frac{A^n}{B^n} = \left(\frac{A}{B}\right)^n.$$

Die Operation des Potenzierens ist *nicht assoziativ*, wenn man mit diesem Ausdrucke die Gleichheit von $(a^m)^n$ und $a^{(m^n)}$ bezeichnen wollte. Denn nach Gl. (4) hat man: $(a^m)^n = a^{mn}$ und andererseits[1]):

$$mn < m^n$$

mit folgenden Ausnahmen: $n = 1$ und $m = n = 2$, in welchen Fällen:

$$mn = m^n,$$

und $m = 1$, $n > 1$, in welchem Falle:

$$mn > m^n.$$

Ebenso wenig ist das Potenzieren eine *kommutative* Operation. Dies ist solange selbstverständlich, als die Auswahl der *Exponenten* auf *natürliche* Zahlen beschränkt bleibt, während für die *Basen* von vornherein *beliebige rationale* Zahlen zugelassen wurden, kommt jedoch bereits vollständig zum Ausdruck, wenn man auch für die Basen nur *natürliche* Zahlen in Betracht zieht. Es läßt sich nämlich zeigen, daß mit Ausschluß der zwei speziellen Fälle $a = 2$ und $m = 3$ oder $m = 4$ stets:

(7) $$a^m > m^a \quad \text{für:} \quad m > a > 1.$$ [2])

Zum Beweise müssen wir die erst im folgenden Paragraphen abzuleitende „Binomialformel" (s. S. 88, Gl. (4)) mit heranziehen. Darnach ist:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{a}\right)^a &= 1 + \frac{a}{1}\cdot\frac{1}{a} + \frac{a(a-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^3 + \cdots \\ &\qquad \cdots + \frac{a(a-1)\cdots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdots a}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^a \\ &< 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdots a} \\ &< 2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{a-1}}\right) = 2 + \left(1 - \frac{1}{2^{a-1}}\right) \\ &< 3\end{aligned}$$

1) Vgl. Nr. 3, S. 82, Fußn. 2.

2) Der Fall $a = 1$ scheidet selbstverständlich von vornherein aus, da für jedes $m > 1$:

$$1^m = 1 < m.$$

und daher durch Multiplikation mit a^a und Anwendung der Formel (5):

$$(a+1)^a < 3 \cdot a^a \leqq a^{a+1} \quad \text{für} \quad a \geqq 3.$$

Die Formel (7) gilt also zunächst für $a \geqq 3$, $m = a + 1$ und kann unter der erstgenannten Voraussetzung durch vollständige Induktion leicht allgemein bewiesen werden. Angenommen nämlich, man habe für irgendein $n \geqq 1$:

$$(a+n)^a < a^{a+n},$$

so folgt:

$$(a+(n+1))^a = (a+n)^a \cdot \left(1 + \frac{1}{a+n}\right)^a$$

$$< a^{a+n} \cdot \left(1 + \frac{1}{a}\right)^a = a^n \cdot (a+1)^a$$

$$< a^n \cdot a^{a+1} = a^{a+(n+1)},$$

womit die Allgemeingültigkeit der Formel (7) für $a \geqq 3$ bewiesen ist.

In dem noch übrig bleibenden Falle $a = 2$ hat man zunächst:

$$2^3 = 8, \quad 3^2 = 9, \quad \text{also:} \quad 2^3 < 3^2,$$

$$2^4 = 16, \quad 4^2 = 16, \quad \text{also:} \quad 2^4 = 4^2,$$

die beiden oben erwähnten Ausnahmefälle. Dagegen ist:

$$2^5 = 32, \quad 5^2 = 25, \quad \text{also:} \quad 2^5 > 5^2.$$

Ist nun für irgendein $m > 4$:

$$m^2 < 2^m,$$

so folgt:

$$(m+1)^2 = m^2\left(1 + \frac{2}{m} + \frac{1}{m^2}\right)$$

$$< 2m^2 < 2 \cdot 2^m = 2^{m+1},$$

d. h. die Formel (7) gilt auch im Falle $a = 2$, sofern nur $m \geqq 5$.

2. Setzt man in der Hauptformel (2) $m + n = n'$, also $n = n' - m$, so folgt zunächst:

$$A^m \cdot A^{n'-m} = A^{n'} \qquad (n' > m)$$

und hieraus, wenn man wieder n statt n' schreibt, durch Division mit A^m:

(8) $$A^{n-m} = \frac{A^n}{A^m} \qquad (n > m).$$

Da die *rechte* Seite dieser Formel auch für $m \leqq n$ einen Sinn behält, so wollen wir festsetzen, daß sie in diesen Fällen als *Definition* der *linken*

gelten soll. Darnach ergibt sich also für $m = n$ als *Definition* von A^0:

(9) $$A^0 = 1\,,$$ [1])

sodann für $m > n$ zunächst:

$$A^{n-m} = \frac{1}{\left(\frac{A^m}{A^n}\right)} = \frac{1}{A^{m-n}}$$

und daher, wenn man $n - m = m'$ (wo $m' > 0$) setzt:

(10) $$A^{-m'} = \frac{1}{A^{m'}} = \left(\frac{1}{A}\right)^{m'}.$$ [2])

Man erkennt leicht, daß auf Grund dieser Definition die Potenzen mit *negativen* ganzzahligen Exponenten denselben Rechnungsregeln genügen (insbesondere den in den Formeln (2), (4), (5) enthaltenen), wie diejenigen mit *positiven* ganzzahligen Exponenten.

So folgt zunächst aus Gl. (8) mit Benützung der Definitionsgleichung (10) als Analogon zu Formel (2):

(2a) $$A^n \cdot A^{-m} = A^{n-m}$$

und als weiteres Analogon:

(2b) $$A^{-n} \cdot A^{-m} = \frac{1}{A^n} \cdot \frac{1}{A^m} = \frac{1}{A^{m+n}} = A^{-(n+m)}.$$

Ferner ergibt sich:

(4b) $$\left.\begin{matrix}(A^{-n})^k \\ (A^n)^{-k}\end{matrix}\right\} = \left(\frac{1}{A^n}\right)^k = \frac{1}{A^{nk}} = A^{-nk}\left\{\begin{matrix}= A^{(-n)\cdot k} \\ = A^{n\cdot(-k)}.\end{matrix}\right.$$

(4c) $$(A^{-n})^{-k} = \left(\frac{1}{A^n}\right)^{-k} = (A^n)^k = A^{nk} = A^{(-n)\cdot(-k)}.$$

(5a) $$A^{-n} \cdot B^{-n} = \left(\frac{1}{A}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{B}\right)^n = \left(\frac{1}{AB}\right)^n = (AB)^{-n}.$$

3. Bedeutet α, wie bisher, eine *positive* rationale Zahl, also $(-\alpha)$ eine *negative*, so hat man offenbar:

(11) $$(-\alpha)^{2m} = \alpha^{2m}, \quad \text{dagegen:} \quad (-\alpha)^{2m+1} = -(\alpha^{2m+1}),$$

also speziell: $(-1)^{2m} = +1$, $(-1)^{2m+1} = -1$.

---

1) Dabei ist ausdrücklich vorauszusetzen, daß *A von Null verschieden* ist. Während nämlich die Definitionsgleichung (1) auch noch für $A = 0$ ihren Sinn behält und demgemäß unbedenklich $0^n = 0$ zu setzen ist, so wird Gl. (8) im Falle $A = 0$, mit Rücksicht auf die Unmöglichkeit der Division durch Null, *sinnlos*. Dasselbe gilt somit von der daraus gezogenen Folgerung (9), und das Symbol 0^0 entbehrt daher geradeso eines bestimmten Sinnes, wie das Symbol $\frac{0}{0}$.

2) Auch hier selbstverständlich mit Ausschluß von $A = 0$.

Ist $\beta > \alpha$, $n > 0$, so hat man offenbar:

(12) $$\beta^n > \alpha^n, \quad \textit{und umgekehrt.}$$

Ist $\alpha > 1$, so hat man: $1 < \alpha < \alpha^2 < \alpha^3$ usf., allgemein:

(13a) $$\alpha^n > \alpha^m, \quad \textit{wenn} \quad n > m, \quad \textit{und umgekehrt.}$$

Dagegen ist offenbar im Falle $\alpha < 1$:

(13b) $$\alpha^n < \alpha^m, \quad \textit{wenn} \quad n > m, \quad \textit{und umgekehrt.}$$ [1]

Es nehmen also die Potenzen eines positiven unechten Bruches mit wachsendem Exponenten n beständig zu, die eines echten Bruches beständig ab. Daß diese Zu- bzw. Abnahme bei unbegrenzt wachsendem n selbst eine unbegrenzte ist, erkennt man am leichtesten mit Hilfe der auch sonst häufig benutzten Ungleichung:

(14) $$(1+\delta)^n > 1 + n\delta \qquad (\delta > 0,\ n \geqq 2),$$

deren Richtigkeit aus dem im nächsten Paragraphen herzuleitenden sog. binomischen Satze folgt, jedoch auch leicht durch vollständige Induktion direkt bestätigt werden kann. Angenommen, Ungl. (14) gelte für irgendein bestimmtes n, so hat man:

$$(1+\delta)^{n+1} > (1+n\delta)(1+\delta) = 1 + (n+1)\delta + n\delta^2 > (1 + (n+1)\delta).$$

Da nun:

$$(1+\delta)^2 = 1 + 2\delta + \delta^2 > 1 + 2\delta,$$

so ist damit die Allgemeingültigkeit von Ungl. (14) bewiesen.

Darnach hat man, falls $\alpha > 1$:

(15) $$\alpha^n = (1 + (\alpha - 1))^n > 1 + n(\alpha - 1)$$ [2],

---

1) Aus

$$\beta^n = \alpha^n \quad \text{bzw.} \quad \gamma^n = \gamma^m \quad (\text{wo } \gamma \lesseqgtr 1)$$

folgt also stets:

$$\beta = \alpha \quad \text{bzw.} \quad n = m.$$

2) Ist $\alpha \geqq 2$, $n \geqq 2$, so hat man auch:

$$\alpha^n > n\alpha,$$

nur im Falle $\alpha = 2$, $n = 2$:

$$\alpha^n = n\alpha.$$

In der Tat findet man für $n = 2$:

$$2^2 = 2 \cdot 2, \quad \text{dagegen:} \quad \alpha^2 = \alpha \cdot \alpha > 2 \cdot \alpha, \quad \text{wenn:} \quad \alpha > 2.$$

Ist sodann $n \geqq 3$, so folgt:

$$\alpha^n = \alpha^{n-1} \cdot \alpha \geqq 2^{n-1} \cdot \alpha > n\alpha$$

(da nach Gl. (15): $2^{n-1} > 1 + (n-1) = n$).

sodaß also α^n eine beliebig groß vorzuschreibende positive Zahl g sicher übersteigt, wenn $1 + n(\alpha - 1) \geqq g$, d. h. wenn $n \geqq \frac{g-1}{\alpha - 1}$.

Das entsprechende Resultat für den Fall $\alpha < 1$ ergibt sich unmittelbar, wenn man setzt: $\alpha = \frac{1}{\alpha'}$ (wo $\alpha' > 1$) und sodann auf α' das soeben gewonnene Ergebnis anwendet.

§ 14. Der binomische Satz für positive ganzzahlige Exponenten.

1. Es seien A, B zwei beliebige rationale Zahlen, n eine natürliche Zahl. Dann läßt sich offenbar $(A+B)^n$, d. h. die n^{te} Potenz des „*Binoms*“ $A + B$, als ein Produkt von n Faktoren $(A+B)$, durch Ausführung der geforderten Multiplikation mittels des distributiven Verfahrens in eine Summe umformen, deren einzelne Glieder Produkte der Form $A^k B^l$ sind. Es handelt sich darum, für das Bildungsgesetz dieser Summe eine Formel abzuleiten, welche gestattet, für jedes einzelne n (d. h. $n = 2, 3, 4, \cdots$) jene Summe sofort anzuschreiben. Die fragliche Formel wird dann als der *binomische Satz* (sc. für positive ganzzahlige Exponenten) oder auch als die *Newtonsche Formel* bezeichnet.

Um die Aufgabe noch etwas zu vereinfachen, hat man:

$$(1)\qquad (A+B)^n = \left(A\left(1+\frac{B}{A}\right)\right)^n = A^n \cdot \left(1+\frac{B}{A}\right)^n,$$

sodaß es im wesentlichen nur auf die Herstellung einer Formel für die Potenz $\left(1+\frac{B}{A}\right)^n$ ankommt. Schreibt man zur Vereinfachung der Bezeichnung statt $\frac{B}{A}$ vorläufig A, so findet man zunächst:

$$\begin{aligned} (1+A)^2 &= 1 + 2A + A^2 \\ (1+A)^3 &= (1+2A+A^2)(1+A) \\ &= 1 + 3A + 3A^2 + A^3 \quad \text{usf.} \end{aligned}$$

Da bei jeder weiteren Erhöhung des Exponenten um 1 zu dem bereits gewonnenen Ausdruck immer wieder der Faktor $(1+A)$ hinzutritt, so erkennt man durch vollständige Induktion, daß für $(1+A)^n$ eine Beziehung von folgender Form sich ergeben muß:

$$(2)\qquad (1+A)^n = 1 + c_1 A^1 + c_2 A^2 + \cdots + c_{n-1} A^{n-1} + c_n A^n,$$

wo $c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}, c_n$ oder, wie man sagt, die *Koeffizienten* der einzelnen Potenzen $A^1, A^2, \cdots, A^{n-1}, A^n$ *positive ganze* Zahlen sein müssen (insbesondere, wie unmittelbar ersichtlich, $c_n = 1$). Um diese ganzzahligen

Koeffizienten zu ermitteln, hat man offenbar nur abzuzählen, *wie oft* bei Ausführung des Produktes:

$$\underbrace{(1+A)(1+A)\cdots(1+A)}_{n \text{ mal}}$$

jede der Potenzen $A, A^2, \cdots, A^n$ vorkommt. Diese Abzählung wird merklich erleichtert, wenn wir zunächst statt des obigen Produktes aus n *gleichen* Faktoren ein analog gebildetes aus n *verschiedenen* Faktoren betrachten, etwa:

$$P_n = (1+A_1)(1+A_2)\cdots(1+A_n),$$

und sodann die Ausführung der Multiplikation in folgender Weise anordnen.

Wir entnehmen zunächst jedem der n Faktoren den Bestandteil 1, woraus für das Gesamtprodukt ein Betrag $1^n = 1$ resultiert; sodann dem ersten Faktor den Bestandteil A_1, allen übrigen wiederum die 1, ebenso dem zweiten Faktor den Bestandteil A_2, allen übrigen wiederum die 1, usf. bis zum n^{ten} Faktor: hierdurch wird also zu dem Produkte der Beitrag

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

geliefert. Der nächste Beitrag wird in der Weise hergestellt, daß wir aus je zwei Faktoren die betreffenden A berücksichtigen, aus allen übrigen wiederum die 1: derselbe hat also die Form:

$$A_1A_2 + A_1A_3 + \cdots + A_1A_n + A_2A_3 + \cdots + A_2A_n + \cdots + A_{n-1}A_n.$$

Der folgende Beitrag besteht dann aus einer Summe von Gliedern aus je drei Faktoren A mit dem Anfangsgliede $A_1A_2A_3$ usf. — der letzte aus dem einzigen Gliede $A_1A_2\cdots A_n$. Auf diese Weise ergibt sich:

$$(3)\qquad \begin{aligned} P_n = 1 &+ A_1 + A_2 + \cdots + A_n \\ &+ A_1A_2 + A_1A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n \\ &+ A_1A_2A_3 + A_1A_2A_4 + \cdots + A_{n-2}A_{n-1}A_n \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ A_1A_2\cdots A_n. \end{aligned}$$

Man bemerke, daß gleichwie die erste Zeile auch jede folgende *lauter verschiedene* Glieder enthält, nämlich solche Produkte, deren Faktoren nach *steigenden* Indizes geordnet sind, sodaß z. B. neben dem Gliede A_1A_2 nicht mehr das Glied A_2A_1 auftritt, ebenso wenig neben $A_1A_2A_3$ noch irgendein anderes aus *denselben* drei Faktoren in anderer Anordnung gebildetes Glied. Andererseits kommt aber auch in der zweiten Zeile jede mögliche Verbindung von der Form A_kA_l, wo k alle möglichen Zahlen

$1, 2, \cdots, n-1$, l alle möglichen Zahlen $2, 3, \cdots, n$ vorstellt und $k<l$, wirklich vor, ebenso in der dritten Zeile jede Verbindung von der Form:

$$A_k A_l A_m$$

(wo: $k=1,2,\cdots,(n-2)$; $l=2,3,\cdots,(n-1)$; $m=3,4,\cdots,n$; $k<l<m$) usf.

Man bezeichnet die in dieser Weise charakterisierten Verbindungen der A_k, A_l, $\cdots$ als *Kombinationen* der *n Elemente* $A_1, A_2, \cdots, A_n$ und zwar diejenigen der zweiten, dritten, $\cdots$, n^{ten} Zeile als solche *zweiter, dritter,* $\cdots$, n^{ter} *Klasse,* schließlich der Gleichförmigkeit der Bezeichnung zuliebe die einzelnen Elemente $A_1, A_2, \cdots, A_n$ als Kombinationen *erster Klasse.*

Nun geht offenbar das Produkt P_n in die Potenz $(1+A)^n$ über, wenn $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sämtlich durch A ersetzt werden. Und zwar liefert die erste Zeile der rechten Seite von Gl. (3) außer dem Gliede 1 lauter Glieder A^1, die zweite lauter Glieder A^2, die dritte A^3, $\cdots$, die n^{te} A^n. Die in Gl. (2) mit $c_1, c_2, \cdots, c_n$ bezeichneten Zahlenkoeffizienten sind daher identisch mit den *Anzahlen der Kombinationen* $1^{\text{ter}}, 2^{\text{ter}}, \cdots, n^{\text{ter}}$ Klasse von n Elementen $A_1, A_2, \cdots, A_n$. Wir gehen daher jetzt darauf aus, diese Anzahlen zu bestimmen.

2. Es erscheint zweckmäßig, der Lösung der eben bezeichneten Aufgabe die folgende Hilfsbetrachtung vorauszuschicken.

Es seien n *„Elemente"* $A_1, A_2, \cdots, A_n$ gegeben: darunter kann man sich, wie in dem zuvor betrachteten Zusammenhange, rationale Zahlen, aber auch ganz beliebige Dinge vorstellen, von denen nur soviel feststeht, daß sie in eine bestimmte *durch laufende Nummern* („Indizes") gekennzeichnete *Reihenfolge* gebracht sind. Durch Abänderung dieser Reihenfolge lassen sich dann mannigfache andere Anordnungen herstellen, deren jede, wie schon in § 3 (S. 16) für natürliche Zahlen als Elemente bemerkt wurde, mit Hinzunahme der ursprünglich gegebenen als eine *Permutation* jener n Elemente bezeichnet wird. Wir behaupten nun:

Die Anzahl aller möglichen Permutationen von n Elementen ist:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n, \text{ kürzer geschrieben: } n! \text{ (spr. } n\text{-Fakultät).}$$

Beweis. Es werde die Anzahl der Permutationen von k Elementen ($k=1, 2, 3, \cdots$) mit p_k bezeichnet. Fügt man irgendeiner Permutation von k Elementen $A_1, A_2, \cdots, A_k$ ein weiteres Element A_{k+1} hinzu, so kann man diesem innerhalb der vorhandenen Anordnung $k+1$ verschiedene Plätze anweisen: am Ende, zwischen je zwei Elementen oder am Anfang. Somit werden aus einer *einzigen* Permutation von k Elementen beim Hinzutreten eines weiteren Elementes $k+1$ *verschiedene* Permutationen von $(k+1)$ Elementen erzeugt, aus allen p_k Permutationen von k Elementen

also p_k $(k+1)$ Permutationen der $(k+1)$ Elemente und damit offenbar alle überhaupt möglichen. Darnach besteht die Rekursionsformel:

$$p_{k+1} = p_k \cdot (k+1).$$

Setzt man hier der Reihe nach $k = 1, 2, \cdots, (n-2), (n-1)$, und beachtet, daß $p_1 = 1$, so ergeben sich die Beziehungen:

$$p_2 = 1 \cdot 2, \quad p_3 = p_2 \cdot 3, \quad \cdots, \quad p_{n-1} = p_{n-2} \cdot (n-1), \quad p_n = p_{n-1} \cdot n$$

und hieraus durch Multiplikation:

$$p_2 \cdot p_3 \cdots p_{n-1} \cdot p_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n \cdot p_2 \cdots p_{n-2} \cdot p_{n-1},$$

also schließlich:

$$p_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!,$$

womit die oben ausgesprochene Behauptung bewiesen ist. —

Es verdient hervorgehoben zu werden, daß diese Permutationszahlen mit der Anzahl der Elemente ganz außerordentlich schnell zunehmen. Man findet z. B.:

$$2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \quad 6! = 720, \quad 7! = 5040,$$
$$8! = 40320, \quad 9! = 362880, \quad 10! = 3628800 \quad \text{usf.}$$

Es lassen sich also aus nur 10 Elementen schon mehr als drei und eine halbe Million Permutationen bilden. Nimmt man als Elemente etwa die Ziffern $0, 1, 2, \cdots, 9$, so würden sich bei Anwendung des ziemlich kleinen Zifferndruckes, wie ihn die gebräuchlichen siebenstelligen Logarithmentafeln aufweisen, auf einer Druckseite in 5 Spalten und 60 Zeilen 300 solcher Permutationen unterbringen lassen. Jene 10! Permutationen würden daher 12096 Druckseiten, d. h. 20 recht stattliche Bände von rund 600 Seiten füllen.

3. Um zunächst die Anzahl aller möglichen Kombinationen 2[ter] Klasse von n Elementen zu bestimmen, verfahren wir folgendermaßen. Die Anzahl aller paarweisen Verbindungen, die sämtlich mit *einem* beliebig herausgegriffenen der n Elemente anfangen, ist offenbar $(n-1)$. Da man aber als Anfangselement der Reihe nach *jedes* der n Elemente benützen kann, so kommen auf diese Weise im ganzen $n(n-1)$ Verbindungen zustande. Diese sind aber keineswegs durchweg *Kombinationen* im Sinne der oben gegebenen Definition. Denn außer $A_1 A_2$ wird bei dem obigen Verfahren offenbar auch $A_2 A_1$ erzeugt und allgemein, außer $A_k A_l$, wo $k < l$, auch $A_l A_k$. Unter den erzielten $n(n-1)$ Verbindungen gehört also nur genau die *Hälfte* dem Typus der *Kombinationen* an, die Anzahl der letzteren ist somit $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$.

Diese Betrachtungsweise läßt sich leicht auf die Kombinationen einer beliebigen, etwa k^{ten} $(k \leqq n)$, Klasse übertragen. Bildet man auch hier zunächst wieder alle überhaupt möglichen Verbindungen, ohne Rücksicht darauf, ob die Elemente nach steigenden Indizes geordnet sind, so hat man jedesmal k Plätze zu besetzen, wobei zur Besetzung des *ersten* Platzes alle n Elemente zur Verfügung stehen. Für die Besetzung des *zweiten* Platzes bleiben dann noch $(n-1)$ Elemente übrig, sodaß für die Besetzung der *beiden* ersten Plätze im ganzen $n(n-1)$ Möglichkeiten existieren (bis hierher verläuft naturgemäß alles genau so, wie in dem zuvor betrachteten Spezialfalle $k=2$). Nun kann man aber offenbar in derselben Weise weiter schließen. Für den *dritten* Platz bleiben allemal noch $(n-2)$ Elemente verfügbar, sodaß also für die Besetzung der ersten drei Plätze $n(n-1)(n-2)$ Möglichkeiten sich ergeben. Für jeden folgenden Platz nimmt die Anzahl der verfügbaren Elemente jedesmal um 1 ab, für den k^{ten} hat man, da für die vorangehenden $(k-1)$ Plätze schon $(k-1)$ Elemente verbraucht sind, nur noch $(n-(k-1)) = (n-k+1)$ Elemente zur Auswahl. Die Anzahl aller überhaupt möglichen Verbindungen von k Elementen ist also

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1).$$

Wählt man unter diesen irgendeine nach steigenden Indizes geordnete, also eine *Kombination* im Sinne unserer Definition, so finden sich, da ja bei dem eingeschlagenen Verfahren *alle überhaupt möglichen* Verbindungen von k Elementen zustande kommen müssen, in der Gesamtzahl der vorhandenen Verbindungen auch die sämtlichen *Permutationen* jener einen Verbindung. Da die Anzahl der Permutationen von k Elementen $k!$ ist, so zerfällt also die Gesamtmenge der Verbindungen in Gruppen von je $k!$, unter denen sich immer nur eine einzige *Kombination* befindet. Man hat also, um deren Anzahl zu bestimmen, die oben angegebene Gesamtanzahl der Verbindungen noch durch $k!$ zu dividieren und findet somit

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$$

als *Anzahl der Kombinationen zur k^{ten} Klasse von n Elementen.*[1]) Die zunächst unter der Voraussetzung $k>2$ abgeleitete Formel stimmt selbstverständlich mit der für $k=2$ bereits gefundenen überein, gilt aber auch

1) Aus der Herleitung folgt, daß ein Quotient von der Form:

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$$

stets eine *ganze* Zahl sein muß. Dies läßt sich übrigens auch auf zahlentheoretischem Wege direkt bestätigen.

noch im Falle $k = 1$, wenn man beachtet, daß dann der erste und letzte Faktor sowohl im Zähler, wie im Nenner zusammenfällt, der obige Ausdruck sich also auf den einen Faktor $\frac{n}{1}$ reduziert.[1])

4. Wendet man dieses Ergebnis auf die in Nr. 1 aufgestellte Beziehung an:

$$(1+A)^n = 1 + c_1 A + c_2 A^2 + \cdots + c_k A^k + \cdots + c_{n-1} A^{n-1} + c_n A^n,$$

so ergibt sich nach dem am Schlusse von Nr. 1 gesagten, daß:

$$c_1 = \frac{n}{1},\ c_2 = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2},\ \cdots,\ c_k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k},\ \cdots,\ c_{n-1} = \frac{n}{1},\ c_n = 1,$$

sodaß also die gesuchte Entwicklung nunmehr folgendermaßen lautet:

$$(4)\quad (1+A)^n = 1 + \frac{n}{1}A + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}A^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}A^k + \cdots$$
$$\cdots + \frac{n}{1}\cdot A^{n-1} + A^n.$$

Die Zahlen von der Form $\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$ (wo $k = 1, 2, \cdots, n$), welche zunächst als Kombinationsanzahlen auftraten, werden wegen des vorliegenden Zusammenhanges gewöhnlich *Binomialkoeffizienten* genannt und von uns mit $(n)_k$ oder, wo ein Mißverständnis ausgeschlossen erscheint, mit n_k bezeichnet.[2]) Es ist also $(n)_k$ definiert durch die Formel:

$$(5)\qquad (n)_k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\qquad (k = 1, 2, \cdots, n).$$ [3])

1) Der Wert $\frac{n}{1}$ resultiert auch für $k = n - 1$, wegen:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdots 2}{1\cdot 2\cdots(n-1)} = \frac{n}{1}.$$

Für $k = n$ wird:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdots 1}{1\cdot 2\cdots n} = 1.$$

Vgl. weiter unten Gl. (5) und (6).

2) Man findet häufig auch die Schreibweise:

$$\binom{n}{k}\quad \text{(spr. } n \text{ über } k\text{).}$$

3) Es besteht also die Rekursionsformel:

$$(n)_k = (n)_{k-1}\cdot\frac{n-k+1}{k}.$$

Fügt man noch die Faktoren $(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1$ zu Zähler und Nenner hinzu[1]), so nimmt $(n)_k$ die Form an:

(5a) $$(n)_k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad (k = 1, 2, \cdots, (n-1)).$$

Da hieraus sich ergibt:

(5b) $$(n)_{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!},$$

so folgt, daß:

(6) $$(n)_{n-k} = (n)_k,$$

d. h. zwei Binomialkoeffizienten, die vom Ende und vom Anfang der Entwicklung (4) gleichweit abstehen, sind einander gleich.

Da die rechte Seite von Gl. (6) auch noch für $k = n$ einen Sinn behält (man hat ja $(n)_n = 1$), so kann sie zur *Definition* von $(n)_0$ dienen. Man findet auf diese Weise:

(7) $$(n)_0 = (n)_n = 1,$$

was der Tatsache entspricht, daß der Koeffizient von A^0 in der Entwicklung (4) den Wert 1 hat und somit mit demjenigen von A^n übereinstimmt. Man kann hiernach die Entwicklung (4) auch in folgender Weise anschreiben:

(8) $$(1+A)^n = (n)_0 + (n)_1 A + \cdots + (n)_k A^k + \cdots + (n)_{n-1} A^{n-1} + (n)_n A^n.$$

Übrigens läßt sich auch die Brauchbarkeit der Formel (5a) auf den Fall $k = n$ ausdehnen, wenn man das bisher noch nicht eingeführte Symbol 0! ausdrücklich *definiert* durch die Formel:

(9) $$0! = 1,$$ [2])

eine Festsetzung, die sich auch späterhin für die Erzielung möglichst symmetrischer und einheitlicher Bezeichnungen als zweckmäßig erweisen wird.

Eine für die Binomialkoeffizienten charakteristische und zuweilen nützliche Relation ergibt sich noch in folgender Weise. Nach (8) hat man, wenn n durch $(n+1)$ ersetzt wird:

(10) $$(1+A)^{n+1} = (n+1)_0 + (n+1)_1 A + \cdots + (n+1)_k A^k + \cdots$$
$$\cdots + (n+1)_n A^n + (n+1)_{n+1} A^{n+1}.$$

---

1) Da $n - k = 0$ würde, wenn $k = n$, so ist hier zunächst k höchstens $= n - 1$ zu nehmen.

2) Mit anderen Worten, man dehnt die für $n > 1$ geltende Beziehung

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

auch auf den Fall $n = 1$ aus. Dementsprechend ergibt sich in der Theorie der sogenannten Gammafunktion:

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

also $0! = \Gamma(1)$ und andererseits $\Gamma(1) = 1$.

Andererseits findet man durch Multiplikation von Gl. (8) mit $(1+A)$:

$$(11)\quad (1+A)^{n+1} = (n)_0 + ((n)_1 + (n)_0)A + \cdots + ((n)_k + (n)_{k-1})A^k + \cdots$$
$$\cdots + ((n)_n + (n)_{n-1})A^n + (n)_n A^{n+1}.$$

Da beide (offenbar dieselbe *Zahl* vorstellende) Entwicklungen lediglich durch distributive Ausführung der geforderten Multiplikation entstanden sind, mit dem einzigen Unterschiede, daß bei der zweiten Ausführung die Assoziation $(1+A)^n \cdot (1+A)$ angewendet wurde, so ist zu vermuten, daß sie geradezu *identisch* sind, d. h. *Glied für Glied vollständig übereinstimmen.*[1]) In diesem Falle würde durch Vergleichung der Koeffizienten von A^k sich ergeben:

$$(12)\qquad (n+1)_k = (n)_k + (n)_{k-1} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n).^{2)}$$

Die Richtigkeit dieser Formel kann man aber durch Einsetzen des definierenden Ausdruckes (5) für $(n)_k$ bzw. $(n)_{k-1}$ *a posteriori* leicht bestätigen. Man findet nämlich:

$$(n)_k + (n)_{k-1} = \left(\frac{n-k+1}{k} + 1\right) \cdot (n)_{k-1}$$
$$= \frac{n+1}{k} \cdot \frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)}{1\cdot 2\cdots(k-1)}$$
$$= \frac{(n+1)\cdot n \cdots ((n+1)-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} = (n+1)_k.$$

Andererseits läßt sich die so gefundene Formel auch benützen, um die Entwicklung (8) durch den Schluß von n auf $(n+1)$ zu verifizieren, in-

1) Die Übereinstimmung des Anfangs- und Endgliedes beider Entwicklungen beruht auf den Beziehungen:

$$(n+1)_0 \quad = (n)_0 = 1$$
$$(n+1)_{n+1} = (n)_n = 1.$$

2) Es hat übrigens keine Schwierigkeit, die *Identität* der Entwicklungen (10) und (11) (welche ohne weiteres aus einem bekannten Satze über ganze rationale Funktionen folgen würde) ganz direkt zu beweisen. Subtrahiert man Gl. (11) von Gl. (10) und beachtet, daß die Anfangs- und Endglieder sich hierbei wegheben (vgl. Fußn. 1), so ergibt sich nach Division mit A (wo $|A| > 0$) die folgende (für jedes von Null verschiedene A gültige) Beziehung:

$$c_1 + c_2 A + \cdots + c_k A^{k-1} + \cdots + c_n A^{n-1} = 0,$$

wo $c_k = (n+1)_k - (n)_k - (n)_{k-1}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$, also *ganzzahlig* oder *Null.* Versteht man sodann unter A eine beliebige *natürliche* Zahl, so folgt, daß *entweder* c_1 durch A, d. h. durch *jede* natürliche Zahl teilbar sein müßte, *oder* daß $c_1 = 0$. Da nur die letztere Möglichkeit zulässig erscheint, so findet man nach nochmaliger Division mit A:

$$c_2 + c_3 A + \cdots c_n A^{n-2} = 0$$

und hieraus durch dieselbe Schlußweise: $c_2 = 0$ usf., schließlich allgemein: $c_k = 0$, d. h. $(n+1)_k = (n)_k + (n)_{k-1}$.

dem man zunächst aus (8) durch Multiplikation mit $(1+A)$ die Beziehung (11) herleitet und diese mit Hilfe der Relation (12) in die Form (10) überführt, womit dann, da die Gültigkeit der Formel (8) für $n=2$ evident ist, die vollständige Induktion geschlossen ist. Diese häufig anzutreffende Beweisform leidet aber an dem empfindlichen Mangel, daß man dazu die Form der Entwicklung (8), d. h. die allgemeine Form der Binomialkoeffizienten, etwa aus den Entwicklungen $(1+A)^2$, $(1+A)^3$ „vermuten" muß, was wohl nicht leicht jemandem gelingen dürfte, der das Resultat nicht bereits gekannt hat.[1])

5. Wenn wir, zu unserem Ausgangspunkte zurückkehrend, in der für $(1+A)^n$ gefundenen Entwicklung (8) A durch $\frac{B}{A}$ ersetzen und die resultierende Gleichung mit A^n multiplizieren (s. Gl. (1)), so ergibt sich als die übliche Form des *binomischen Satzes*[2]):

$$(13)\qquad (A+B)^n = A^n + (n)_1 A^{n-1}\cdot B + (n)_2 A^{n-2}\cdot B^2 + \cdots \\ \cdots + (n)_k A^{n-k}\cdot B^k + \cdots + (n)_{n-1} A B^{n-1} + B^n.$$

Die *linke* Seite dieser Gleichung bleibt bei Vertauschung von A und B ungeändert. Das analoge gilt aber auch von der *rechten* Seite, genauer gesagt, die einzelnen Glieder der Entwicklung (13) erscheinen dabei durchweg unverändert, nur in umgekehrter Reihenfolge, wie man unmittelbar mit Hilfe der oben abgeleiteten Beziehung (6): $(n)_{n-k} = (n)_k$ erkennt.[3])

Kapitel II.

Begrenzte und unbegrenzte Systembrüche. — Rational-konvergente Zahlenfolgen.

§ 15. Systematische Darstellung der natürlichen Zahlen.

1. Wie in § 1, Nr. 2 (S. 5) gezeigt wurde, kann man sämtliche Zahlzeichen unseres gewöhnlichen *„dekadischen"* Zahlensystems *in gehöriger Anordnung* durch ein rein formales, kombinatorisches Verfahren

---

1) Newton ist auf recht kompliziertem Wege zu dieser „Vermutung" gelangt (s. Opuscula, Ed. Castilloneus, 1 [1784], S. 307. 328).

2) Dabei schreiben wir der Einfachheit halber wieder 1 statt $(n)_0$ und $(n)_n$.

3) Man könnte aber auch analog, wie in Fußnote 1 der vorigen Seite, die *Identität* der Entwicklungen von $(A+B)^n$ und $(B+A)^n$ und damit die Gültigkeit der Beziehung:

$$(n)_{n-k} = n_k$$

beweisen.

erzeugen. In Wahrheit verdanken dieselben indessen ihre Entstehung einem anderen Erzeugungsprinzip, nämlich einer *nach fallenden Potenzen von* 10 *geordneten Summenbildung.*[1]) Die notwendige Grundlage hierzu liefert der folgende allgemeine Satz:

Ist b eine beliebig vorgeschriebene natürliche Zahl $\geqq 2$, so läßt sich jede andere natürliche Zahl $g \geqq b$ stets und nur auf eine einzige Weise in der Form darstellen:

$$g = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \cdots + a_1 b + a_0,$$

wo m bei fester Wahl von b eine lediglich von g abhängige natürliche Zahl bedeutet, während die a_ν $(\nu = 0, 1, \cdots, m)$ stets der Reihe $0, 1, \cdots, (b-1)$ angehören und speziell a_m von Null verschieden ist.

Beweis. Da $g \geqq b$, so existiert in der Reihe der Potenzen:

$$b^1, b^2, b^3, \cdots$$

stets *eine* und *nur* eine, etwa mit b^m $(m \geqq 1)$ zu bezeichnende, von *der* Beschaffenheit, daß

$$\textit{entweder:}\quad b^m = g \quad \textit{oder:}\quad b^m < g, \quad \text{dagegen:}\quad b^{m+1} > g.$$

Man faßt offenbar diese *beiden* Möglichkeiten zusammen, indem man setzt:

$$b^m \leqq g < b^{m+1}.$$

Bildet man sodann:

$$1 \cdot b^m, 2 \cdot b^m, \cdots, (b-1) \cdot b^m,$$

so muß — wegen $b \cdot b^m = b^{m+1} > g$ — in der Reihe dieser Zahlen *eine* solche, etwa $c \cdot b^m$, vorkommen, daß

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{entweder:} & g = c \cdot b^m \\ \textit{oder:} & cb^m < g < (c+1) \cdot b^m \end{array}\right\} \text{wo also: } 1 \leqq c \leqq b - 1.$$

Man faßt wiederum *beide* Möglichkeiten zusammen, wenn man setzt:

$$g = c \cdot b^m + r,$$

wo r eine bestimmte Zahl aus der Reihe $0, 1, \cdots, (b^m - 1)$ vorstellt.

Ist nun $r \leqq b - 1$, so ist offenbar die verlangte Darstellung von g mit der letzten Gleichung bereits erzielt.

Ist dagegen $r \geqq b$, so kann man offenbar in analoger Weise r in die Form setzen:

$$r = c_1 \cdot b^{m_1} + r_1,$$

---

1) Z. B. $740309 = 7 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 9$.

wo jetzt: $m_1 \leqq m-1$, $1 \leqq c_1 \leqq b-1$, $0 \leqq r_1 \leqq b^{m_1}-1$. Alsdann wird:

$$g = c \cdot b^m + c_1 \cdot b^{m_1} + r_1.$$

Im Falle $r_1 \leqq b-1$ ist die Zerlegung wiederum beendet. Ist dagegen $r_1 \geqq b$ (aber nach dem obigen jedenfalls $\leqq b^{m_1}-1$), so kann man das bisher benutzte Verfahren auf r_1 anwenden, und so fortfahrend muß man nach einer begrenzten Anzahl derartiger Operationen schließlich zu einer Gleichung von der Form gelangen:

$$g = c \cdot b^m + c_1 \cdot b^{m_1} + \cdots + c_k \cdot b^{m_k} + r_k,$$

wo nicht nur die $c_1, c_2, \cdots, c_k$ sämtlich der Reihe $1, 2, \cdots, (b-1)$ angehören, sondern auch r_k einen dieser Werte hat, bzw. auch *Null* sein kann, während:

$$m > m_1 > \cdots > m_k \geqq 1.$$

Dabei kann die *Anzahl* der hierzu erforderlichen Operationen die Zahl m *keinesfalls übersteigen*, da ja jeder der Exponenten $m_1, m_2, \cdots, m_k$ *mindestens* um 1 kleiner ist als der unmittelbar vorangehende.

Schreibt man jetzt a_m statt c und versteht unter $a_{m-1}, a_{m-2}, \cdots, a_0$ Zahlen, welche in passender Weise mit den oben durch $c_1, c_2, \cdots, c_k, r_k$ bezeichneten Zahlen übereinstimmen, im übrigen *Null* sind, so wird, wie oben behauptet:

$$(1) \qquad g = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \cdots + a_1 b + a_0,$$

wo also a_m der Reihe $1, 2, \cdots, (b-1)$ angehört, während $a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}$ außer einem dieser Werte auch (sämtlich oder zum Teil) den Wert 0 haben können.

Um ferner zu erkennen, daß die Darstellung (1) nur *auf eine einzige Weise* möglich ist, bemerke man, daß aus (1) — wegen $a_m \geqq 1$ — stets folgt:

$$(2\text{a}) \qquad g \geqq b^m$$

und andererseits, wegen $a_\nu \leqq b-1$ $(\nu = 0, 1, \cdots, m)$, stets:

$$g \leqq (b-1)(b^m + b^{m-1} + \cdots + b + 1) \quad \text{d. h.} \quad \leqq b^{m+1} - 1$$

und somit:

$$(2\text{b}) \qquad g < b^{m+1}.$$

Angenommen nun, man hätte außer der Darstellung (1) die folgende:

$$g = a'_\mu \cdot b^\mu + a'_{\mu-1} \cdot b^{\mu-1} + \cdots + a_1' b + a_0'$$

(wo wiederum $1 \leqq a'_\mu \leqq b-1$; $0 \leqq a_\nu' \leqq b-1$ für $\nu = 0, 1, \cdots, (\mu-1)$),

so hätte man mit Benützung der Ungleichungen (2) gleichzeitig:

$$\left.\begin{matrix} b^m \\ b^\mu \end{matrix}\right\} \leqq g < \left\{\begin{matrix} b^{m+1} \\ b^{\mu+1} \end{matrix}\right.$$

und daher wiederum *gleichzeitig:*

$$b^m < b^{\mu+1}, \quad \text{also:} \quad m \leqq \mu,$$
$$b^\mu < b^{m+1}, \quad \text{also:} \quad \mu \leqq m,$$

was offenbar nur in der Weise möglich ist, daß:

$$\mu = m.$$

Hiernach könnte also jene zweite Darstellung von g immerhin nur die folgende Form haben:

$$g = a_m' b^m + a_{m-1}' b^{m-1} + \cdots + a_1' b + a_0',$$

wo speziell a_m' von Null verschieden.

Da nun analog wie die Ungl. (2b) sich ergibt, daß:

$$\left.\begin{matrix} a_{m-1} b^{m-1} + \cdots + a_1 b + a_0 \\ a_{m-1}' b^{m-1} + \cdots + a_1' b + a_0' \end{matrix}\right\} < b^m,$$

so hätte man *gleichzeitig:*

$$\left.\begin{matrix} a_m b^m \\ a_m' b^m \end{matrix}\right\} \leqq g < \left\{\begin{matrix} (a_m + 1) \cdot b^m \\ (a_m' + 1) \cdot b^m \end{matrix}\right.$$

und daher wiederum *gleichzeitig:*

$$\left.\begin{matrix} a_m < a_m' + 1 \quad \text{d. h.} \quad a_m \leqq a_m' \\ a_m' < a_m + 1 \quad \text{d. h.} \quad a_m' \leqq a_m \end{matrix}\right\} \text{also schließlich:} \quad a_m' = a_m.$$

Nachdem auf diese Weise die Identität der Anfangsglieder erwiesen, hätte sich der weitere Beweis nur auf die Identität der beiden Ausdrücke:

$$g_1 = a_{m-1} b^{m-1} + \cdots + a_1 b + a_0$$

und:

$$g_1 = a_{m-1}' b^{m-1} + \cdots + a_1' b + a_0'$$

zu erstrecken. Sind nun a_{m-1}, a_{m-1}' beide von Null verschieden, so beweist man in derselben Weise wie oben, daß auch $a_{m-1}' = a_{m-1}$ sein muß. Ist dagegen einer dieser beiden Koeffizienten Null — etwa $a_{m-1} = 0$ —, so folgt sofort, daß dann $g_1 < b^{m-1}$ und daher auch $a_{m-1}' = 0$ sein muß — *vice versa.* Man findet also in dieser Weise fortschließend, daß jene zwei Darstellungen in Wahrheit identisch sein müssen. —

2. Das vorstehende Ergebnis kann nun in folgender Weise dazu benützt werden, die Reihe der natürlichen Zahlen mit Hilfe einer *begrenzten* Anzahl *einfacher Fundamentalzeichen*, *Ziffern* genannt, übersichtlich darzustellen. Schreibt man das durch Gl. (1) dargestellte Resultat in folgender abgekürzter Weise:

$$g = (a_m a_{m-1} \cdots a_1 a_0), \tag{3}$$

wobei jetzt die Zahlen a_ν $(\nu = 0, 1, \cdots, m)$ nicht, wie sonst üblich, *Faktoren* eines Produktes bedeuten, sondern a_ν das Vorkommen des *Summanden* $a_\nu \cdot b^\nu$ in der für g geltenden Darstellung (1) anzeigen soll, oder noch etwas allgemeiner ausgedrückt, wo eine an der $(\nu + 1)^{\text{ten}}$ Stelle (von *rechts* aus gerechnet) stehende *Ziffer* a (d. h.: $0 \leqq a \leqq b - 1$) den *Summanden* $a \cdot b^\nu$ darstellt, so folgt aus dem oben bewiesenen Satze, daß — nach Festsetzung der im übrigen beliebig (nur $\geqq 2$) zu wählenden Zahl b — *jede* positive ganze Zahl g *stets* auf *eine* und *nur* auf *eine* Weise durch ein Symbol von der Form (3) dargestellt werden kann. Die *verschiedenen* zur Darstellung *aller* Zahlen g ausreichenden *Ziffern* sind die Zeichen für die Zahlen $0, 1, \cdots, (b-1)$, ihre Anzahl ist also $= b$; während die Anzahl der zur Darstellung irgendeiner bestimmten Zahl g *überhaupt erforderlichen* Ziffern den Wert $(m + 1)$ hat, wenn m den *größten* ganzzahligen Exponenten bedeutet, welcher der Bedingung genügt: $b^m \leqq g$.

Die Gesamtheit aller möglichen mit Zugrundelegung einer beliebig fixierten Zahl b als „*Basis*", in der angegebenen Weise „*systematisch*" dargestellten natürlichen Zahlen bilden ein *Zahlensystem* mit der *Basis* b.

Bei dem üblichen *dekadischen* Zahlensystem, wo also b den Wert *zehn* hat, sind in der Tat *zehn* verschiedene *Ziffern* $0, 1, \cdots, 9$ zur Darstellung aller möglichen Zahlen erforderlich und ausreichend.

Bedient man sich dieser „arabischen" Ziffern zur Darstellung eines Systems *mit beliebiger anderer Basis* (wobei man natürlich einen Teil dieser Ziffern gänzlich wegzulassen bzw. noch eine passende Anzahl neuer Ziffern hinzuzufügen hätte, je nachdem die Basis *kleiner* oder *größer* als *zehn* ist), so wird offenbar diese Basis selbst in der Schreibweise der Formel (3) stets dargestellt durch das Symbol (10), da ja nach dem oben gesagten:

$$(10) = 1 \cdot b + 0 = b$$

ist.

Nimmt man speziell $b = 2$, so bedarf man zur Herstellung des betreffenden, d. h. des sogenannten *dyadischen* Zahlensystems nur der beiden Ziffern 0 und 1. Den dekadischen Zahlen von 1 bis 10 entsprechen hier die folgenden Bezeichnungen:

Dekadisch:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dyadisch:	1	(10)	(11)	(100)	(101)	(110)	(111)	(1000)	(1001)	(1010).

Ferner hätte man z. B.:

$$100 = 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^2 = (1100100).$$

$$1000 = 1\cdot 2^9 + 1\cdot 2^8 + 1\cdot 2^7 + 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^3$$
$$= (1111101000) \text{ usf.}$$

§ 16. Die systematischen Brüche (Systembrüche).

1. Wie die im vorigen Paragraphen betrachtete *„systematische Darstellung“* der natürlichen Zahlen die Verallgemeinerung und zugleich die eigentliche arithmetische Grundlage des *dekadischen* Systems bildete, so gestatten auch die aus der Rechenpraxis jedermann geläufigen *„Dezimalbrüche“* eine analoge, für die genauere Kenntnis ihres Wesens zweckmäßige und für die weiteren Entwicklungen besonders wichtige Verallgemeinerung.

Es sei wiederum b eine irgendwie fixierte natürliche Zahl $\geqq 2$, während $a_1, a_2, \cdots, a_n$ beliebige Zahlen aus der Reihe $0, 1, \cdots, (b-1)$ bedeuten sollen und speziell a_n als *von Null verschieden* angenommen wird. Alsdann soll der Ausdruck:

(1) $$\sigma_n = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \cdots + \frac{a_n}{b^n}$$

als ein *n-stelliger systematischer Bruch* oder *Systembruch* mit der *Basis* b bezeichnet werden.

Man erkennt zunächst, daß jedes solche σ_n stets kleiner als 1 ist. Denn man hat:

$$\sigma_n \leqq (b-1)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} + \cdots + \frac{1}{b^n}\right)$$

(2) $$\leqq 1 - \frac{1}{b^n}, \quad \text{also sicher: } \sigma_n < 1.$$

Bezeichnet man sodann allgemein mit σ_k $(k = 1, 2, \cdots, (n-1))$ den Systembruch:

$$\sigma_k = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \cdots + \frac{a_k}{b^k},$$

so ergibt sich:

(3) $$\sigma_n - \sigma_k = \frac{1}{b^k}\left\{\frac{a_{k+1}}{b} + \cdots + \frac{a_n}{b^{n-k}}\right\} > 0$$

und sodann nach Analogie von Ungl. (2):

(4) $$\sigma_n - \sigma_k \leqq \frac{1}{b^k}\left(1 - \frac{1}{b^{n-k}}\right) = \frac{1}{b^k} - \frac{1}{b^n},$$

also sicher:

$$\sigma_n - \sigma_k < \frac{1}{b^k},$$

sodaß man in Verbindung mit (3) findet:

$$(5) \qquad \sigma_k < \sigma_n < \sigma_k + \frac{1}{b^k},$$

d. h.

Bricht man einen Systembruch σ_n bei einem beliebigen Gliede $\frac{a_k}{b^k}$ ab, so erhält man einen kleineren Bruch, der sich aber von σ_n um weniger als $\frac{1}{b^k}$ unterscheidet.

2. Schreibt man in (4) m statt n, wo $k < m < n$ sein soll, so wird:

$$\sigma_m - \sigma_k \leqq \frac{1}{b^k} - \frac{1}{b^m},$$

also:

$$(6) \qquad \sigma_m + \frac{1}{b^m} \leqq \sigma_k + \frac{1}{b^k},$$

d. h.:

$$\frac{a_1}{b} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{b^{m-1}} + \frac{a_m + 1}{b^m} \leqq \frac{a_1}{b} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{b^{k-1}} + \frac{a_k + 1}{b^k} \quad (k < m).$$

Hierzu ist noch zu bemerken, daß das *Gleichheitszeichen*, wie die Herleitung (s. Ungl. (2)) zeigt, nur in dem *einzigen* Falle gilt, daß die Zähler $a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots, a_m$ *ausnahmslos* den extremen Wert $(b-1)$ haben.

Beachtet man noch, daß im allgemeinen stets $\sigma_k < \sigma_m$, dagegen $\sigma_k = \sigma_m$, wenn speziell $a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_m = 0$, so kann man die Ungleichungen (5) und (6) dahin zusammenfassen, daß für $k < m < n$ stets:

$$(7) \qquad \sigma_k \leqq \sigma_m < \sigma_n < \sigma_m + \frac{1}{b^m} \leqq \sigma_k + \frac{1}{b^k},$$

wobei das *erste Gleichheits*zeichen nur dann gilt, wenn:

$$a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_m = 0,$$

das *zweite*, wenn:

$$a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_m = b - 1.$$

3. Hat man *zwei* systematische Brüche:

$$\sigma_n = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \cdots + \frac{a_n}{b^n},$$

$$\sigma_m' = \frac{a_1'}{b} + \frac{a_2'}{b^2} + \cdots + \frac{a_m'}{b^m},$$

welche einander *gleich* sind, also:

$$\sigma_m' = \sigma_n,$$

so müssen sie geradezu *identisch* sein, d. h. Glied für Glied vollständig übereinstimmen. Denn sei etwa $n \geqq m$, so hat man:

$$b^n \cdot \sigma_n = a_1 b^{n-1} + a_2 b^{n-2} + \cdots + a_n$$
$$b^n \cdot \sigma'_m = a_1' b^{n-1} + a_2' b^{n-2} + \cdots + a'_m b^{n-m},$$

wo $n - m \geqq 0$. Da aber $b^n \cdot \sigma'_m = b^n \cdot \sigma_n$, so folgt aus dem Satze des vorigen Paragraphen, daß die beiden rechten Seiten dieser Gleichungen als systematische Darstellungen der nämlichen ganzen Zahl *identisch* sein müssen, d. h. es ergibt sich, da a_n, a'_m von Null verschieden, vor allem, daß $n - m = 0$ und sodann: $a_\nu' = a_\nu$ $(\nu = 1, 2, \cdots, n)$ sein muß.

§ 17. Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Systembrüche. — Der einem echten Bruche zugeordnete periodische Systembruch.

1. Sei wiederum:

(1) $$\sigma_n = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \cdots + \frac{a_n}{b^n},$$

so folgt durch Multiplikation mit b^n, daß $b^n \cdot \sigma_n$ eine *ganze* Zahl g ist, nämlich:

(2) $$g = a_1 b^{n-1} + a_2 b^{n-2} + \cdots + a_{n-1} b + a_n < b^n$$

und daher:

(3) $$\sigma_n = \frac{g}{b^n} < 1,$$

d. h. ein n-stelliger Systembruch ist stets einem gewöhnlichen *echten* Bruche mit dem Nenner b^n gleich. Nun kann b^n mit g irgendeinen Teiler gemein haben. Ist sodann nach Weglassung des größten gemeinsamen Teilers

(4) $$\frac{g}{b^n} = \frac{r}{q},$$

wo jetzt r und q *relativ prim*, so muß wegen $\frac{r \cdot b^n}{q} = g$ (d. h. gleich einer ganzen Zahl) q ein Teiler von b^n sein (nach § 6, Nr. 4, S. 37), kann daher nach § 6, Nr. 1 (S. 33) keine anderen Primfaktoren enthalten, als b^n, also schließlich als b selbst.

Hieraus folgt aber, daß umgekehrt ein beliebig vorgelegter *reduzierter* echter Bruch $\frac{r}{q}$ jedenfalls *höchstens* dann einem Systembruche mit der Basis b gleich sein kann, wenn q keine anderen Primfaktoren enthält, als b.

Diese für die Darstellbarkeit von $\frac{r}{q}$ durch einen Systembruch *notwendige* Bedingung erweist sich aber auch als *hinreichend.*

Denn enthält q keine anderen Primfaktoren als b, so lassen sich natürliche Zahlen ν so groß finden, daß q in b^ν aufgeht. Angenommen,

es sei $\nu = n$ der *kleinste* Exponent, welcher dieses leistet, so hat man wegen: $\frac{r}{q} < 1$, also: $\frac{r \cdot b^n}{q} < b^n$, nach dem Satze des § 15:

(5) $$\frac{r b^n}{q} = a_1 b^{n-1} + a_2 b^{n-2} + \cdots + a_{n-1} b + a_n,$$

wo speziell a_n von *Null verschieden* sein muß, da sonst die rechte Seite, also auch $\frac{r \cdot b^n}{q}$ durch b *teilbar* wäre, und daher schon $\frac{r \cdot b^{n-1}}{q}$, d. h. schließlich $\frac{b^{n-1}}{q}$ eine ganze Zahl sein müßte. Daraus folgt weiter, daß:

(6) $$\frac{r}{q} = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \cdots + \frac{a_n}{b^n}$$

und man findet somit:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit eines reduzierten echten Bruches $\frac{r}{q}$ durch einen Systembruch mit der Basis b besteht darin, daß q nur solche Primfaktoren enthält, welche auch in b vorkommen.

Zugleich folgt noch aus Nr. 3 des vorigen Paragraphen:

Es gibt stets nur eine einzige Darstellung der fraglichen Art.

2. Ein reduzierter echter Bruch $\frac{r}{q}$, dessen Nenner q *nicht* den eben angegebenen Bedingungen genügt, kann also *keinesfalls* in einen Systembruch mit der Basis b umgeformt werden. Dagegen läßt sich zeigen, daß es dann stets einen nach bestimmter Vorschrift zu bildenden und *unbegrenzt fortsetzbaren* Systembruch σ_ν $(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$ gibt, welcher sich von $\frac{r}{q}$ *beliebig wenig* und zwar *um so weniger* unterscheidet, je *größer* die Stellenzahl ν genommen wird.

Um bei der hierzu dienlichen Betrachtung auch den in Nr. 1 behandelten besonderen Fall mit zu umfassen, bedeute $\frac{r}{q}$ einen *ganz beliebigen* reduzierten echten Bruch, d. h. einen solchen, dessen Nenner q der in Art. 1 angegebenen Bedingung genügen kann oder auch nicht. Man hat alsdann:

(7) $$\frac{r}{q} = \frac{r b}{q} \cdot \frac{1}{b},$$

und kann andererseits stets setzen (s. § 6, Gl. (2a), S. 35):

(8) $$\frac{r b}{q} = a_1 + \frac{r_1}{q},$$

wo a_1, r_1 im allgemeinen natürliche Zahlen bedeuten, eventuell auch *eine* der beiden Zahlen a_1, r_1 gleich *Null* sein kann und außerdem:

$$a_1 < b, \quad r_1 < q.$$

Hiernach wird zunächst:

(9) $$\frac{r}{q} = \frac{a_1}{b} + \frac{r_1}{q} \cdot \frac{1}{b}$$

($0 \leqq a_1 < b$, $0 \leqq r_1 < q$ — wobei also das *Gleichheits*zeichen so zu verstehen ist, daß höchstens *eine* der beiden Zahlen a_1, r_1 gleich *Null* sein kann).

Wendet man im Falle $r_1 > 0$ die nämliche Transformation auf $\frac{r_1}{q}$ an, also:

$$\frac{r_1}{q} = \frac{a_2}{b} + \frac{r_2}{q} \cdot \frac{1}{b} \quad (0 \leqq a_2 < b,\ 0 \leqq r_2 < q),$$

so wird:

$$\frac{r}{q} = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \frac{r_2}{q} \cdot \frac{1}{b^2},$$

und, indem man dasselbe Verfahren unter der Voraussetzung, daß $r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}$ sämtlich von Null verschieden sind, im ganzen n-mal wiederholt:

(10) $$\left\{\begin{array}{l} \frac{r}{q} = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \cdots + \frac{a_n}{b^n} + \frac{r_n}{q} \cdot \frac{1}{b^n}, \\ \text{wo: } 0 \leqq a_1, a_2, \cdots, a_n < b, \quad 0 \leqq r_n < q. \end{array}\right.$$

Tritt nun hierbei für irgendein n der Fall ein, daß $r_n = 0$ wird, so ergibt sich:

$$\frac{r}{q} = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \cdots + \frac{a_n}{b^n},$$

d. h. $\frac{r}{q}$ ist alsdann einem bestimmten Systembruche gleich. Dieser Fall kann aber nach Nr. 1 *nur* dann eintreten, wenn q nur solche Primfaktoren enthält, die in b vorkommen. Derselbe *muß* dann aber bei dem hier eingeschlagenen Verfahren auch wirklich eintreten. Denn unter der gemachten Voraussetzung existiert nach Art. 1 sicher eine Darstellung von der Form:

$$\frac{r}{q} = \frac{a_1'}{b} + \frac{a_2'}{b^2} + \cdots + \frac{a_n'}{b^n},$$

während man auf Grund des eben angegebenen Divisionsverfahrens andererseits setzen kann:

$$\frac{r}{q} = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \cdots + \frac{a_n}{b^n} + \frac{r_n}{q} \cdot \frac{1}{b^n} \quad (\text{wo } r_n < q).$$

Man hat also:

$$\frac{r \cdot b^n}{q} \begin{cases} = a_1' b^{n-1} + a_2' b^{n-2} + \cdots + a_n' \\ = a_1 b^{n-1} + a_2 b^{n-2} + \cdots + a_n + \frac{r_n}{q}, \end{cases}$$

woraus mit Notwendigkeit folgt: $\frac{r_n}{q} = 0$, d. h. $r_n = 0$ und sodann nach Nr. 3 des vorigen Paragraphen: $a_\nu' = a_\nu$ $(\nu = 1, 2, \cdots, n)$.

Hingegen erscheint es auf Grund von Nr. 1 allemal, wenn q irgendeinen in b *nicht* vorkommenden Primfaktor enthält, definitiv *ausgeschlossen*, daß bei dem obigen Divisionsverfahren jemals ein Rest $r_n = 0$ auftreten könne, und man erhält somit in diesem Falle für $\frac{r}{q}$ bei jedem *noch so großen* Werte von n eine Darstellung von der Form (10). Man hat infolgedessen für jedes (noch so große) ν:

(11) $$\frac{r}{q} = \sigma_\nu + \frac{r_\nu}{q} \cdot \frac{1}{b^\nu},$$

wo $0 < r_\nu < q$ und:

(12) $$\sigma_\nu = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \cdots + \frac{a_\nu}{b^\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots).$$

Da hierbei stets: $0 < \frac{r_\nu}{q} < 1$, so kann man Gl. (11) auch durch die folgende Ungleichung ersetzen:

(13) $$\sigma_\nu < \frac{r}{q} < \sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu},$$

sodaß sich das Resultat dieser Betrachtung folgendermaßen aussprechen läßt:

Ein reduzierter echter Bruch $\frac{r}{q}$, dessen Nenner q mindestens einen in b nicht vorkommenden Primfaktor enthält, kann nicht durch einen Systembruch σ_ν mit der Basis b dargestellt werden. Dagegen gibt es einen auf Grund eines bestimmten Divisionsverfahrens unbegrenzt fortsetzbaren Systembruch σ_ν $(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$ (anders ausgedrückt: eine unbegrenzte Folge, durch sukzessives Hinzufügen je einer weiteren Stelle entstehender Systembrüche: $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_\nu, \cdots$) von der Beschaffenheit, daß $\frac{r}{q}$ jeden Systembruch σ_ν um weniger als $\frac{1}{b^\nu}$, also bei unbegrenzter Vergrößerung von ν beliebig wenig übersteigt.

3. Es läßt sich nun vor allem noch zeigen, daß die bei dem oben angewandten Divisionsverfahren resultierende Folge von Zählern a_ν einem einfachen Gesetze, demjenigen der *Periodizität*, genügen muß.

Da nämlich die bei dem obigen Prozesse auftretenden Zahlen r_ν ($\nu = 0, 1, 2, \cdots$, wobei r_0 die Bedeutung von r haben soll) durchweg der Reihe $1, 2, \cdots, (q-1)$ angehören, da es also *höchstens* $(q-1)$ *verschiedene* Zahlen r_ν geben kann, so muß *spätestens* die q^{te} dieser Zahlen d. h. *spätestens* r_{q-1} irgendeinem der *früher* schon vorgekommenen r_ν *gleich* sein. Es sei nun r_k die *erste* der Zahlen r_ν, welche bei jenem Verfahren *wiederkehrt*, und zwar geschehe dies *zum ersten Male* bei dem Stellenzeiger $k+m$. Mit anderen Worten: $r_0, r_1, \cdots, r_{k+m-1}$ seien sämtlich *verschieden*, dagegen:

(14) $$r_{k+m} = r_k.$$

Dabei ist nach dem gesagten stets:

(15) $$k + m \leqq q - 1,$$

woraus, wegen $k \geqq 0$, $m \geqq 1$, des weiteren folgt:

(16) $$0 \leqq k \leqq q-2, \quad 1 \leqq m \leqq q-1.$$

Man hat zunächst:

(17) $$\frac{r}{q} = \frac{a_1}{b} + \cdots + \frac{a_k}{b^k} + \frac{r_k}{q} \cdot \frac{1}{b^k},$$

(18) $$\frac{r_k}{q} = \frac{a_{k+1}}{b} + \cdots + \frac{a_{k+m}}{b^m} + \frac{r_k}{q} \cdot \frac{1}{b^m} \quad (\text{wegen: } r_{k+m} = r_k),$$

also:

$$\frac{r}{q} = \frac{a_1}{b} + \cdots + \frac{a_k}{b^k} + \frac{a_{k+1}}{b^{k+1}} + \cdots + \frac{a_{k+m}}{b^{k+m}} + \frac{r_k}{q} \cdot \frac{1}{b^{k+m}},$$

und, da $\frac{r_k}{q}$ immer wieder die Entwicklung (18) liefert, bei λ-maliger Anwendung dieses Verfahrens:

(19) $$\begin{aligned}\frac{r}{q} = \frac{a_1}{b} + \cdots + \frac{a_k}{b^k} &+ \frac{a_{k+1}}{b^{k+1}} + \cdots + \frac{a_{k+m}}{b^{k+m}} \\ &+ \frac{a_{k+1}}{b^{k+m+1}} + \cdots + \frac{a_{k+m}}{b^{k+2m}} \\ &+ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &+ \frac{a_{k+1}}{b^{k+(\lambda-1)m+1}} + \cdots + \frac{a_{k+m}}{b^{k+\lambda m}} + \frac{r_k}{q} \cdot \frac{1}{b^{k+\lambda m}}\end{aligned}$$

($\lambda = 1, 2, 3, \cdots$) oder, kürzer geschrieben:

(20) $$\frac{r}{q} = \sigma_k + \frac{P}{b^{k+m}}\left(1 + \frac{1}{b^m} + \cdots + \frac{1}{b^{(\lambda-1)m}}\right) + \frac{r_k}{q} \cdot \frac{1}{b^{k+\lambda m}},$$

wo:

(21) $$\sigma_k = \frac{a_1}{b} + \cdots + \frac{a_k}{b^k} \quad (\text{NB. } \sigma_k = 0, \text{ falls: } k = 0),$$

(22) $$P = a_{k+1} \cdot b^{m-1} + a_{k+2} \cdot b^{m-2} + \cdots + a_{k+m-1} b + a_{k+m}.$$

Die Entwicklung (19) bzw. (20) hat also die charakteristische Eigenschaft, daß die Zähler $a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots, a_{k+m}$ beständig in derselben Reihenfolge oder, wie man zu sagen pflegt, *„periodisch"* wiederkehren. Die durch Gl. (22) definierte *ganze Zahl P*, d. h. diejenige ganze Zahl, welche systematisch durch Potenzen von b dargestellt die Zahlen $a_{k+1}, \cdots, a_{k+m}$ zu Koeffizienten (Ziffern) hat, heißt die *Periode* des obigen Systembruches und zwar, in dem vorliegenden Falle, eine *m-gliedrige* Periode.

4. Beginnt die Periode schon mit dem Gliede a_1 — ein Fall, welcher offenbar eintritt, wenn $k = 0$, wenn also der erste überhaupt wiederkehrende Divisionsrest $r_m = r_0$ d. h. $= r$ ist —, so heißt der betreffende Systembruch *rein periodisch*, dagegen im Falle $k \geqq 1$ *unrein periodisch*.

Im *ersten* Falle (also für $k = 0$) hat man:

$$(23) \qquad \frac{r}{q} = \frac{a_1}{b} + \cdots + \frac{a_m}{b^m} + \frac{r}{q} \cdot \frac{1}{b^m},$$

und daher:

$$(24) \qquad \frac{r(b^m - 1)}{q} = a_1 b^{m-1} + \cdots + a_{m-1} b + a_m,$$

sodaß also, da r und q *relativ prim*, $\dfrac{b^m - 1}{q}$ eine *ganze* Zahl sein muß. Daraus folgt aber weiter, daß q mit b *relativ prim* sein muß, da kein Teiler von b gleichzeitig ein Teiler von $b^m - 1$ sein kann.

Im *zweiten* Falle, $k \geqq 1$, ergibt sich (nach Analogie von Gl. (9)) zunächst:

$$(25\text{a}) \qquad \frac{b r_{k-1}}{q} = a_k + \frac{r_k}{q},$$

und wegen $r_{k+m} = r_k$:

$$(25\text{b}) \qquad \frac{b r_{k+m-1}}{q} = a_{k+m} + \frac{r_k}{q},$$

wo r_{k+m-1} von r_{k-1} *verschieden* sein muß, da ja r_k die *erste* der Zahlen r_ν sein sollte, welche später wiederkehrt. Daraus folgt weiter:

$$(26) \qquad \frac{b(r_{k-1} - r_{k+m-1})}{q} = a_k - a_{k+m},$$

eine Beziehung, welche aussagt, daß der links auftretende Quotient eine *ganze* Zahl sein muß. Da aber r_{k-1} und r_{k+m-1} *kleiner* als q sind und daher um so mehr $|r_{k-1} - r_{k+m-1}| < q$, so muß q zum mindesten *teilweise* (und zwar, da ja q wenigstens einen in b *nicht* vorkommenden Primfaktor enthält, *wirklich nur teilweise*) in b aufgehen, d. h. mit b einen *gemeinsamen Teiler* haben.

Durch Zusammenfassung dieser beiden Resultate ergibt sich also:

Die ***notwendige und hinreichende*** *Bedingung dafür, daß bei der oben betrachteten Umformung von $\frac{r}{q}$ ein* ***rein*** *periodischer Systembruch zum Vorschein kommt, besteht darin, daß q* ***relativ prim*** *zu b ist.*

Zugleich läßt sich der Inhalt der Ungleichungen (15), (16) jetzt folgendermaßen formulieren:

Die Anzahl der nicht-periodischen und der ***eine*** *Periode bildenden Glieder des zu $\frac{r}{q}$ gehörigen Systembruches ist zusammengenommen* ***höchstens*** *gleich $(q-1)$. Ist der betreffende Systembruch* ***rein*** *periodisch, so ist also die Anzahl der Periodenglieder* ***höchstens*** *$(q-1)$; enthält er dagegen k* ***nicht***-*periodische Glieder (wo k allemal $\leqq q-2$), so ist die Anzahl der Periodenglieder höchstens $(q-k-1)$.*

5. Durch die vorstehenden Betrachtungen ist gezeigt, daß jedem reduzierten echten Bruche $\frac{r}{q}$, falls q irgendeinen in b *nicht* vorkommenden Primfaktor enthält, *vermittelst eines ganz bestimmten, vollkommen eindeutig verlaufenden Divisionsverfahrens* ein unbegrenzt fortsetzbarer, übrigens periodischer Systembruch σ_ν $(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$ mit der Basis b zugeordnet werden kann, derart, daß für *jedes* $\nu = 1, 2, 3, \cdots$ (s. Ungl. (13)):

$$\sigma_\nu < \frac{r}{q} < \sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu}.$$

Es verdient nun aber hervorgehoben zu werden, daß diese doppelte Ungleichung den unbegrenzt fortsetzbaren Systembruch σ_ν, d. h. *jedes einzelne Glied* von σ_ν, schon an sich *völlig eindeutig* bestimmt. Mit anderen Worten: es kann überhaupt *kein zweiter* (gleichgültig, ob periodischer oder nicht-periodischer) unbegrenzt fortsetzbarer Systembruch σ_ν' $(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$ existieren, welcher der Bedingung genügt:

$$\text{(13a)} \qquad \sigma_\nu' < \frac{r}{q} < \sigma_\nu' + \frac{1}{b^\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots).$$

Sollen nämlich σ_ν' und σ_ν nicht *für jedes* ν vollkommen *identisch* sein, d. h. Glied für Glied übereinstimmen, so muß für irgendeine *erste* Stelle $\nu = n$ eine *Verschiedenheit* zwischen σ_ν' und σ_ν zum Vorschein kommen, d. h. σ_n' muß sich von σ_n im letzten Zähler („in der letzten Bruchstelle“) *mindestens* um 1 unterscheiden, sodaß also:

$$\text{(a)} \quad \sigma_n' \geqq \sigma_n + \frac{1}{b^n} \qquad \text{oder:} \qquad \text{(b)} \quad \sigma_n' + \frac{1}{b^n} \leqq \sigma_n.$$

Daraus würde aber, wegen $\sigma_n + \frac{1}{b^n} > \frac{r}{q}$ und $\sigma_n < \frac{r}{q}$, unmittelbar folgen:

$$\sigma_n' > \frac{r}{q} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_n' + \frac{1}{b^n} < \frac{r}{q},$$

und somit *a fortiori* (s. § 16, Nr. 2, S. 97, Ungl. (7)) für $\nu \geqq n$:

$$\sigma_\nu' > \frac{r}{q} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_\nu' + \frac{1}{b^\nu} < \frac{r}{q},$$

sodaß also in beiden Fällen σ_ν' für $\nu \geqq n$ der Bedingung (13a) nicht mehr genügen würde.

Es gibt also in der Tat nur einen *einzigen*, der Bedingung (13) genügenden, unbegrenzt fortsetzbaren Systembruch, welcher andererseits durch das in Nr. 2 auseinandergesetzte Verfahren auch allemal wirklich gewonnen werden kann.

Hiernach können wir das Hauptresultat dieses Paragraphen nunmehr in folgender Weise formulieren:

Jedem reduzierten echten Bruche $\frac{r}{q}$ läßt sich, wenn q mindestens einen in b nicht vorkommenden Primfaktor enthält, ein und nur ein unbegrenzt fortsetzbarer, übrigens allemal periodischer Systembruch σ_ν mit der Basis b zuordnen, welcher für jedes ν der Bedingung genügt:

$$\sigma_\nu < \frac{r}{q} < \sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu}. \tag{13}$$

§ 18. Der einem periodischen Systembruche zugeordnete gewöhnliche Bruch. — Umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen rationalen Zahlen und periodischen Systembrüchen.

1. Das zuletzt ausgesprochene Resultat erweist sich mit Ausnahme eines einzigen, sogleich näher anzugebenden und eine unerhebliche Modifikation erheischenden Falles als vollkommen *umkehrbar*. Es gilt nämlich der folgende Satz:

Jedem periodischen[1]) *Systembruche σ_ν mit der Basis b, sofern er nicht gerade die eingliedrige Periode $(b-1)$ besitzt, läßt sich ein und nur ein echter Bruch σ zuordnen, welcher für jedes ν der Bedingung genügt:*

$$\sigma_\nu < \sigma < \sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu}. \tag{1}$$

1) Ein *„periodischer"* Systembruch ist *eo ipso* allemal *„unbegrenzt fortsetzbar"*.

Beweis. Der vorgelegte Bruch σ_ν ($\nu = 1, 2, 3, \cdots$) sei zunächst *rein* periodisch und zwar sei seine Periode

$$P = a_1 b^{m-1} + a_2 b^{m-2} + \cdots + a_{m-1} b + a_m \tag{2}$$

(wo also $m \geqq 1$, $0 \leqq a_\nu \leqq b-1$ mit der Beschränkung, daß weder *durchweg* $a_\nu = 0$, noch *durchweg* $a_\nu = b-1$). Bedeutet dann λ eine beliebige natürliche Zahl, so hat man (vgl. § 17, Nr. 3, S. 102, Gl. (20), für $k = 0$, $\sigma_k = 0$):

$$\sigma_{\lambda m} = P\left(\frac{1}{b^m} + \frac{1}{b^{2m}} + \cdots + \frac{1}{b^{\lambda m}}\right)$$

$$= \frac{P}{b^m - 1} \cdot (b^m - 1)\left(\frac{1}{b^m} + \frac{1}{b^{2m}} + \cdots + \frac{1}{b^{\lambda m}}\right)$$

$$= \sigma \cdot \left(1 - \frac{1}{b^{\lambda m}}\right), \tag{3}$$

wenn gesetzt wird:

$$\frac{P}{b^m - 1} = \sigma. \tag{4}$$

Aus Gl. (3) folgt dann zunächst, daß:

$$\sigma_{\lambda m} < \sigma, \tag{5}$$

und sodann:

$$\sigma_{\lambda m} + \frac{1}{b^{\lambda m}} = \sigma + (1 - \sigma) \cdot \frac{1}{b^{\lambda m}}. \tag{6}$$

Da aber:

$$P < (b-1)(b^{m-1} + b^{m-2} + \cdots + b + 1) \quad \text{d. h.} \quad < b^m - 1,$$

so ergibt sich:

$$\sigma = \frac{P}{b^m - 1} < 1 \tag{7}$$

und daher nach Gl. (6):

$$\sigma_{\lambda m} + \frac{1}{b^{\lambda m}} > \sigma, \tag{8}$$

somit durch Zusammenfassung von Ungl. (5) und (8):

$$\sigma_{\lambda m} < \sigma < \sigma_{\lambda m} + \frac{1}{b^{\lambda m}}. \tag{9}$$

Bedeutet jetzt ν eine ganz beliebige, *nicht* in der Form λm enthaltene natürliche Zahl, so nehme man λ groß genug an, daß $\lambda m > \nu$. Alsdann hat man nach Ungl. (7), S. 97:

$$\sigma_\nu \leqq \sigma_{\lambda m}, \quad \sigma_{\lambda m} + \frac{1}{b^{\lambda m}} \leqq \sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu}$$

und daher auch:

$$\sigma_\nu < \sigma < \sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu} \quad \text{(für jedes } \nu\text{)}, \tag{10}$$

womit also die Existenz einer Zahl σ von der fraglichen Beschaffen-

heit zunächst für den Fall eines *rein* periodischen Systembruches erwiesen ist.

Bezeichnet man jetzt mit σ_ν' die Summe von ν Gliedern eines *unrein* periodischen Systembruches wiederum mit der Periode P und den k nicht-periodischen Anfangsgliedern:

$$(11)\quad \frac{a_1'}{b} + \frac{a_2'}{b^2} + \cdots + \frac{a_k'}{b^k} = \frac{Q}{b^k}, \text{ wo: } Q = a_1' b^{k-1} + a_2' b^{k-2} + \cdots + a_k',$$

so hat man für $\nu > k$:

$$(12)\qquad \sigma_\nu' = \frac{Q}{b^k} + \frac{\sigma_{\nu-k}}{b^k},$$

wo $\sigma_{\nu-k}$ die nämliche Bedeutung hat, wie zuvor, d. h. die Summe der ersten $\nu - k$ Glieder eines *rein* periodischen Systembruches mit der Periode P vorstellt. Gibt man dann auch σ wiederum die frühere, durch Gl. (4) fixierte Bedeutung und setzt:

$$(13)\qquad \sigma' = \frac{Q}{b^k} + \frac{\sigma}{b^k} = \frac{(b^m Q + P) - Q}{b^k(b^m - 1)},$$ [1]

so hat man nach Ungl. (10):

$$\sigma_{\nu-k} < \sigma < \sigma_{\nu-k} + \frac{1}{b^{\nu-k}}$$

und hieraus durch Addition von Q und Multiplikation mit $\frac{1}{b^k}$:

$$(14)\qquad \sigma_\nu' < \sigma' < \sigma_\nu' + \frac{1}{b^\nu}$$

zunächst für jedes $\nu > k$, sodann aber auf Grund von Ungl. (7), S. 97, *a fortiori* für $\nu \leqq k$. Mit anderen Worten: die Ungl. (1) gilt auch in diesem Falle, wenn man den ν-gliedrigen Systembruch mit σ_ν bezeichnet und unter σ die durch Gl. (13) definierte Zahl σ versteht.

Um schließlich noch zu zeigen, daß es stets nur *eine* der Bedingung (1) genügende rationale Zahl σ gibt, werde angenommen, es sei auch:

$$\sigma_\nu < \tau < \sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu} \quad \text{(für jedes } \nu).$$

---

1) Dabei ist allemal:

$$\sigma' < 1,$$

wegen:

$$\frac{Q}{b^k} \leqq 1 - \frac{1}{b^k} \quad \text{(s. Ungl. (2), S. 97)}$$

$$\frac{\sigma}{b^k} < \frac{1}{b^k}.$$

Setzt man diese Ungleichung in die folgende Form:

$$-\sigma_\nu - \frac{1}{b^\nu} < -\tau < -\sigma_\nu$$

und addiert sie sodann zu Ungl. (1), so wird:

$$-\frac{1}{b^\nu} < \sigma - \tau < \frac{1}{b^\nu},$$

also:

$$|\sigma - \tau| < \frac{1}{b^\nu}$$

für jedes noch so große ν. Da aber $b^\nu > \nu b$ (s. § 13, Nr. 3, S. 82, Fußn. 2) bei unbegrenzt wachsendem ν jede noch so große positive Zahl übersteigt, so würde die obige Ungleichung aussagen, daß $|\sigma - \tau|$ *kleiner* ist, als *jede noch so kleine positive rationale Zahl*. Wären nun σ und τ voneinander *verschieden*, so müßte die Differenz $\sigma - \tau$ eine *bestimmte* positive oder negative, ihr absoluter Betrag also eine *bestimmte positive* rationale Zahl sein, kann also *nicht kleiner* sein, als *jede* positive rationale Zahl. Somit ergibt sich mit Notwendigkeit, daß

$$\sigma = \tau$$

sein muß, mit anderen Worten: es gibt, wie behauptet, nur *eine einzige* der Bedingung (1) genügende Zahl σ.

Es erscheint zweckmäßig, das soeben benutzte Beweisprinzip ein für allemal in folgender Weise zu formulieren:

> *Kann man von zwei rationalen Zahlen* σ *und* τ *nachweisen, daß* $|\sigma - \tau| < \varepsilon$, *wie klein auch die positive rationale Zahl* ε *angenommen werden möge, so muß* $\sigma = \tau$, *also* $\sigma - \tau = 0$ *sein.*

2. Wir betrachten jetzt noch den zuvor ausgeschlossenen Fall der eingliedrigen Periode $(b-1)$. Ist zunächst der fragliche Systembruch *rein* periodisch, so hat man als Summe der ersten ν Glieder:

$$\begin{aligned}\sigma_\nu &= \frac{b-1}{b} + \frac{b-1}{b^2} + \cdots + \frac{b-1}{b^\nu} \\ &= \left(1 - \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{b^{\nu-1}} - \frac{1}{b^\nu}\right)\end{aligned}$$

d. h.:

(15) $$\sigma_\nu = 1 - \frac{1}{b^\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots).$$

An die Stelle der Ungl. (1) tritt somit in dem vorliegenden Falle die Beziehung:

(16) $$\sigma_\nu < 1 = \sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu} \quad (\nu \geqq 1).$$

Daraus folgt dann für die Summe σ_ν' der ersten ν Glieder eines *unrein* periodischen Bruches mit k nicht-periodischen Zählern $a_1', \cdots, a_k'$ und der eingliedrigen Periode $(b-1)$:

$$(17) \qquad \sigma_\nu' = \frac{a_1'}{b} + \cdots + \frac{a_k'}{b^k} + \frac{\sigma_{\nu-k}}{b^k} = \frac{Q + \sigma_{\nu-k}}{b^k},$$

daß:

$$(18) \qquad \sigma_\nu' < \frac{Q+1}{b^k} = \sigma_\nu' + \frac{1}{b^\nu} \quad (\nu \geqq k).$$[1]

Es existiert also auch zu jedem Systembruche mit der eingliedrigen Periode $(b-1)$ eine bestimmte *rationale Zahl* $\left(\text{nämlich } 1 \text{ bzw. } \frac{Q+1}{b^k}\right)$, welche zu demselben in einer ganz ähnlichen Beziehung steht, wie die oben mit σ bezeichnete Zahl zu irgendeinem Systembruche, dessen Periode *nicht* jene spezielle Form hat. Nur tritt hier an die Stelle des *zweiten Ungleichheits*zeichens das *Gleichheits*zeichen und, im Falle des *rein* periodischen Systembruches, an die Stelle von $\sigma < 1$ die Zahl 1.[2] Im übrigen zeigt das in den Formeln (16) und (18) auftretende *Gleichheits*zeichen, daß es außer 1 bzw. $\frac{Q+1}{b^k}$ *keine zweite* Zahl geben kann, welche der Relation (16) bzw. (18) genügt.

3. Der Inhalt der Relationen (16) und (18) läßt sich noch in etwas anderer Weise formulieren, wenn man statt des periodischen Systembruches σ_ν bzw. σ_ν' die Zahl 1 bzw. die reduzierte Form $\frac{r}{q}$ des Bruches $\frac{Q+1}{b^k}$ als das ursprünglich gegebene ansieht. Da in diesem Falle q nur solche Primfaktoren enthalten kann, die auch in b vorkommen, so läßt sich auch

1) Für $\nu < k$ hat man offenbar, analog wie früher:

$$\sigma_\nu' < \frac{Q+1}{b^k} < \sigma_\nu' + \frac{1}{b^\nu}.$$

2) Dagegen hat man auch hier allemal:

$$\frac{Q+1}{b^k} < 1.$$

Denn es muß sein:

$$\frac{Q}{b^k} < 1 - \frac{1}{b^k}$$

mit *Ausschluß* der *Gleichheit*, da diese letztere nur eintreten würde, wenn:

$$a_1' = \cdots = a_k' = b - 1,$$

was unmöglich ist, da ja der betreffende Systembruch dann *rein* periodisch ausfallen würde.

umgekehrt $\frac{r}{q}$ nach § 17, Nr. 1 (S. 99) stets durch einen begrenzten Systembruch, etwa:

$$\frac{r}{q} = \frac{a_1'}{b} + \cdots + \frac{a_k' + 1}{b^k} \quad (\text{wo } k \geqq 1,\ a_k' \geqq 0),$$

also auch in der Form:

$$\frac{r}{q} = \frac{Q+1}{b^k} \quad (\text{wo } Q = a_1' b^{k-1} + \cdots + a_{k-1}' b + a_k')$$

darstellen. Daraus folgt dann weiter, daß $\frac{r}{q}$ zu dem oben mit σ_ν' bezeichneten Systembruche in der Beziehung (18) steht. Mit Hinzunahme der Relation (16) können wir also folgendes aussprechen:

Bedeutet α die Zahl 1 *oder einen positiven echten Bruch, dessen Nenner nur Primfaktoren von b enthält, so läßt sich allemal ein unbegrenzt fortsetzbarer Systembruch σ_ν mit der Basis b und der eingliedrigen Periode* $(b-1)$ *angeben, derart, daß:*

(19) $$\sigma_\nu < \alpha = \sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu}$$

(für $\nu \geqq k$, wenn k die Anzahl der nicht-periodischen Glieder).

Man erkennt zugleich, daß wiederum *kein zweiter* (gleichgültig, ob *periodischer* oder *nicht-periodischer*) unbegrenzt fortsetzbarer Systembruch σ_ν' existiert, welcher der Bedingung (19) oder auch nur der erweiterten Bedingung:

$$\sigma_\nu' < \alpha \leqq \sigma_\nu' + \frac{1}{b^\nu}$$

genügt. Wenn nämlich in dieser letzteren das *Gleichheits*zeichen für irgendeinen besonderen Wert $\nu = k$ Geltung hat, so gilt es auch für *jedes* $\nu > k$, da ja (nach § 16, Nr. 2, S. 97, Ungl. (6)) für $\nu > k$:

$$\sigma_\nu' + \frac{1}{b^\nu} \leqq \sigma_k' + \frac{1}{b^k}.$$

Aus der in diesem Falle für $\nu \geqq k$ also bestehenden Gleichung:

$$\alpha = \sigma_\nu' + \frac{1}{b^\nu}$$

folgt sodann durch Vergleichung mit (19) unmittelbar, daß $\sigma_\nu' = \sigma_\nu$ für $\nu \geqq k$ und somit σ_ν' mit σ_ν für jedes ν geradezu *identisch* ist (§ 16, Nr. 3, S. 98).

Hätte man andererseits beständig:

$$\sigma_\nu' < \alpha < \sigma_\nu' + \frac{1}{b^\nu},$$

so würde aus der Vergleichung mit (19) sich ergeben:

$$\sigma_\nu' + \frac{1}{b^\nu} > \sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu},$$

also:

$$\sigma_\nu' > \sigma_\nu \quad \text{d. h.} \quad \geqq \sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu}$$

und somit schließlich:

$$\sigma_\nu' \geqq \alpha,$$

was mit der gemachten Annahme in Widerspruch steht.

4. Um die vorstehend gefundenen Resultate möglichst allgemein formulieren zu können, wollen wir die Bezeichnung „*Systembruch*" jetzt auf jeden Ausdruck von der Form:

$$(20) \qquad \sigma_\nu = g + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \cdots + \frac{a_\nu}{b^\nu}$$

übertragen, wo g *jede ganz beliebige natürliche Zahl* (eventuell auch die *Null*) vorstellen kann, während im übrigen wieder $a_1, a_2, \cdots, a_\nu$ „*Ziffern*" bedeuten, d. h. der Reihe der Zahlen $0, 1, \cdots, (b-1)$ anzugehören haben. Da sich andererseits *jede positive gebrochene* Zahl in die Form $g + \frac{r}{q}$ setzen läßt (wo $\frac{r}{q}$ einen *echten reduzierten Bruch* vorstellt) und *jede positive ganze* Zahl g auch durch $(g-1)+1$ ersetzt werden kann, so lassen sich die beiden aufgefundenen Beziehungen zwischen *Systembrüchen* und *echten Brüchen* $\frac{r}{q}$ bzw. *der Zahl* 1 durch Addition von g bzw. $(g-1)$ in entsprechende Beziehungen zwischen *Systembrüchen von der Form* (20) und *beliebigen* (d. h. nicht mehr an die Bedingung $\sigma \leqq 1$ gebundenen) *positiven rationalen Zahlen* σ umformen. Darnach ergibt sich aber schließlich der folgende Hauptsatz:

Jeder positiven rationalen Zahl σ läßt sich ein und nur ein unbegrenzt fortsetzbarer[1]*), übrigens allemal periodischer Systembruch σ_ν mit beliebig vorgeschriebener Basis b zuordnen, derart, daß:*

$$(21) \qquad \sigma_\nu < \sigma \leqq \sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu} \quad (\text{für jedes } \nu = 0, 1, 2, \cdots).$$

Umgekehrt gehört zu jedem periodischen Systembruche σ_ν eine und nur eine der Bedingung (21) *genügende rationale Zahl σ.*

---

1) Unter einem *unbegrenzt fortsetzbaren* Systembruch ist, wie der ganze Zusammenhang zeigt, ein für allemal ein solcher zu verstehen, welcher unbegrenzt viele *von Null verschiedene* Zähler enthält. Andernfalls könnte man ja auch einen *begrenzten* Systembruch in *dem* Sinne als „*unbegrenzt fortsetzbar*" bezeichnen, daß es ja freisteht, denselben durch eine unbegrenzte Folge von lauter *Nullen* zu ver-

Es findet also zwischen den *positiven rationalen Zahlen* einerseits und den zu einer bestimmten, aber beliebig zu wählenden Basis b gehörigen *periodischen Systembrüchen* andererseits eine *eindeutig umkehrbare* Beziehung von der Form (21) statt. Dies ist in Wahrheit der eigentliche Inhalt derjenigen Aussage, welche beim Rechnen mit *Dezimalbrüchen*, also für den speziellen Fall $b = 10$, gewöhnlich in *der* Weise ausgesprochen wird: man könne jeden rationalen Bruch in einen *unendlichen* periodischen Dezimalbruch (allenfalls mit der eingliedrigen Periode 9) *verwandeln* und *umgekehrt*. Es entsteht nun die Frage, in wiefern man — ähnlich wie es ja beim Rechnen mit Dezimalbrüchen zu geschehen pflegt — jeden unbegrenzt fortsetzbaren periodischen Systembruch geradezu als *Ersatz* für eine gewisse rationale Zahl verwenden kann. Es erscheint zweckmäßig, bei der Beantwortung dieser Frage sich nicht auf die besondere Form der periodischen Systembrüche zu beschränken, sondern einen allgemeineren Typus unbegrenzt fortsetzbarer Zahlenfolgen dabei zu Grunde zu legen.

§ 19. Unbegrenzte Zahlenfolgen als Ersatz für rationale Zahlen: Rational-konvergente Zahlenfolgen.

1. Es sei $A_0, A_1, \cdots, A_\nu, \cdots\cdots$ eine unbegrenzt fortsetzbare Folge rationaler Zahlen (beliebigen Vorzeichens), d. h. es sei irgendeine bestimmte Vorschrift gegeben, vermöge deren für jeden beliebigen Stellenzeiger ν das zugehörige A_ν bestimmbar ist (z. B. $A_\nu = \sigma_\nu$, wo σ_ν einen periodischen Systembruch bis zum ν^{ten} Gliede einschließlich bedeutet; ferner: $A_\nu = \frac{\nu}{\nu+1}$, $A_\nu = \frac{\nu + (-1)^\nu}{\nu+1}$, $A_\nu = (-1)^\nu \cdot \frac{\nu}{\nu+1}$, $A_\nu = \nu^{(-1)^\nu}$ usf.; aber auch: $A_\nu = \nu^{\text{te}}$ Primzahl in der Reihe der natürlichen Zahlen; $A_\nu = 1$, wenn ν das Quadrat einer natürlichen Zahl ist, dagegen $A_\nu = -1$ in jedem anderen Falle usf.). Ferner werde angenommen, es existiere eine rationale Zahl A, welche sich von *allen* Zahlen A_ν, deren Index ν eine passend gewählte natürliche Zahl erreicht oder übersteigt (anders ausgesprochen: von *allen* Zahlen A_ν *mit Ausnahme* einer passend *bestimmten* Anzahl), *beliebig wenig* unterscheidet. D. h.: *wie klein* auch ein positiver Bruch ε vorgeschrieben werden möge, so soll immer eine natürliche Zahl n vorhanden sein, derart, daß:

(1) $$|A - A_\nu| < \varepsilon \quad \text{für jedes} \quad \nu \geqq n.$$

längern. Man bemerke übrigens, daß bei dieser Auffassung ein n-stelliger Systembruch $\sigma_n = \sigma$ *nicht* der Bedingung (21), vielmehr einer solchen von der Form:

$$\sigma_\nu \leqq \sigma < \sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

genügen würde, wobei für $\nu \geqq n$ im ersten Teile der Ungleichung durchweg das *Gleichheits*zeichen gilt.

Die Zahl n wird natürlich wesentlich von der Wahl des ε abhängen, in der Weise, daß im allgemeinen bei Verkleinerung von ε es notwendig sein wird, n zu vergrößern. Man könnte diese Abhängigkeit der Zahl n von der Wahl des ε dadurch kenntlich machen, daß man n_ε statt n schreibt, und in der Tat werden wir uns gelegentlich dieser Schreibweise bedienen, falls der Zusammenhang es wünschenswert erscheinen läßt, die fragliche Abhängigkeit besonders zum Ausdruck zu bringen. Zunächst aber wollen wir es bei der in Ungl. (1) angewendeten Bezeichnung belassen und uns damit begnügen, ein für allemal hervorgehoben zu haben, daß in Ungleichungspaaren von der Form (1) (wie sie in unseren weiteren Untersuchungen als geradezu *typisch* sich äußert häufig einstellen werden) die Bestimmung der mit n bezeichneten Zahl allemal wesentlich von der Wahl der mit ε bezeichneten abhängt.

Wir zeigen nun zunächst, daß, wenn es *überhaupt* eine den Bedingungen (1) genügende rationale Zahl A gibt, es stets nur *eine einzige* solche Zahl geben kann, mit anderen Worten, daß die Zahl A durch die Bedingungen (1) *vollkommen eindeutig* bestimmt erscheint.

Angenommen, es gäbe noch eine zweite Zahl A' der fraglichen Art, so hätte man zu beliebig klein vorzuschreibendem $\varepsilon > 0$:

$$|A - A_\nu| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{etwa für} \quad \nu \geqq n,$$

$$|A' - A_\nu| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{etwa für} \quad \nu \geqq n',$$

und es würden daher, wenn N die größere der beiden Zahlen n und n' bedeutet, für $\nu \geqq N$ die beiden Beziehungen:

$$|A - A_\nu| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |A' - A_\nu| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gleichzeitig bestehen, sodaß also sich ergeben würde:

$$|A' - A| < \varepsilon.$$

Da es aber freisteht, die positive Zahl ε unbegrenzt zu verkleinern, so folgt auf Grund des in Nr. 1 des vorigen Paragraphen (S. 108) erörterten Beweisprinzips, daß:

$$A' = A,$$

womit also die ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

Beispiele: Setzt man $A_\nu = \frac{\nu}{\nu+1} = 1 - \frac{1}{\nu+1}$, so wird: $1 - A_\nu = \frac{1}{\nu+1}$, also: $|1 - A_\nu| < \varepsilon$, wenn $\nu + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, d. h. $\nu \geqq n$, wo n die größte in $\frac{1}{\varepsilon}$ enthaltene ganze Zahl bedeutet. Somit ist $A = 1$.

Analog hat man für $A_\nu = \frac{\nu+2}{\nu+1} = 1 + \frac{1}{\nu+1}$, $|1 - A_\nu| = \frac{1}{\nu+1}$, also $A = 1$.

Man bemerke, daß die Glieder der ersten Zahlenfolge, nämlich: $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots$, durchweg *unterhalb* der speziellen Zahl $A = 1$ liegen und sich dieser *beständig wachsend* nähern; während bei der zweiten Zahlenfolge, nämlich: $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \cdots$, die durchweg *oberhalb* 1 liegenden Glieder beständig *abnehmend* der 1 zustreben.

Betrachtet man schließlich die Folge der Zahlen:

$$A_\nu = \frac{\nu + 1 + (-1)^\nu}{\nu + 1} = 1 + \frac{(-1)^\nu}{\nu + 1},$$

so findet man wieder: $|1 - A_\nu| = \frac{1}{\nu + 1}$, also $A = 1$, während hier die Glieder der betreffenden Folge, nämlich:

$$\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{2\mu + 2}{2\mu + 1}, \frac{2\mu + 1}{2\mu + 2}, \cdots,$$

in beständigem Wechsel teils *oberhalb*, teils *unterhalb* der Zahl 1 liegend, dieser letzteren unbegrenzt näher kommen.

2. Wir wollen eine unbegrenzt fortsetzbare Zahlenfolge $(A_0, A_1, \cdots, A_\nu, \cdots)$ der betrachteten Art, also eine solche, die zu einer bestimmten rationalen Zahl A in der durch die Ungleichungen (1) dargestellten Beziehung steht, als *rational-konvergent* bezeichnen und dafür das abgekürzte Zeichen $\{A_\nu\}$ einführen. Da nach dem unmittelbar zuvor gesagten die Zahl A durch die Zahlenfolge $\{A_\nu\}$ *völlig eindeutig bestimmt* ist, so wollen wir das Zeichen $\{A_\nu\}$ als *Ersatz*zeichen für die rationale Zahl A zulassen, setzen also geradezu:

(2) $$\{A_\nu\} = A \text{ [1]}$$

und sagen: die Zahl A sei durch die Zahlenfolge $\{A_\nu\}$ *darstellbar*.

Sollen nun diese *neuen* Zeichen für bereits vorhandene Zeichen wirklich *brauchbar* werden, so wird es auf Grund der bisher in analogen Fällen befolgten Methode[2]) vor allem auf die Beantwortung der folgenden zwei Fragen ankommen:

1) Wie erkennt man, ob zwei Zeichen von der Form $\{A_\nu\}$, $\{A'_\nu\}$ *dieselbe* Zahl vorstellen, bzw. welches der beiden Zeichen die *größere (kleinere)* Zahl vorstellt?

2) Wie lassen sich *Summe* und *Produkt* zweier in der Form $\{A_\nu\}$, $\{B_\nu\}$ vorgelegter Zahlen durch Zeichen der nämlichen Art darstellen?

3. Ehe wir diese Fragen erledigen, schicken wir noch die folgenden Bemerkungen voraus. Die in Nr. 1 angestellte Betrachtung behält ihren

---

1) Z. B. $\left\{\frac{\nu}{\nu + 1}\right\} = 1$, $\left\{\frac{\nu + 1 + (-1)^\nu}{\nu + 1}\right\} = 1$ usf.

2) Vgl. § 7, Nr. 1 (S. 38) und § 10, Nr. 1 (S. 54).

Sinn, wenn die mit A bezeichnete rationale Zahl die *Null* ist (vgl. § 12, Nr. 5, S. 73), in welchem Falle, wegen $|-A_\nu| = |A_\nu|$, die Bedingung (1) die Form annimmt:

(3) $$|A_\nu| < \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu \geqq n \text{ [1]}$$

$\left(\text{z. B. } A_\nu = \frac{1}{\nu+1},\ A_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu+1}\right)$. Wir wollen alsdann die Folge $\{A_\nu\}$ nach Bedarf noch spezieller als *null-konvergent* bezeichnen und setzen in diesem Falle nach Analogie von (2):

(4) $$\{A_\nu\} = 0 \,. \text{ [2]}$$

Die *null-konvergenten* Folgen sind also lediglich eine besondere Gattung der *rational-konvergenten.*

Ferner: Sind die Folgen $\{A_\nu\}$, $\{B_\nu\}$ *rational-konvergent,* so besitzen auch die Folgen $\{A_\nu + B_\nu\}$, $\{A_\nu - B_\nu\}$ diese Eigenschaft, und zwar hat man:

(5) $$\{A_\nu \pm B_\nu\} = A \pm B, \quad \text{wenn:} \quad \{A_\nu\} = A, \ \{B_\nu\} = B$$

(auch im Falle $A = 0$ *oder* bzw. *und* $B = 0$).

Beweis. Man hat identisch:

$$A \pm B - (A_\nu \pm B_\nu) = (A - A_\nu) \pm (B - B_\nu)$$

und daher:

$$|(A \pm B) - (A_\nu \pm B_\nu)| \leqq |A - A_\nu| + |B - B_\nu| .$$

Wird jetzt zu beliebig vorgeschriebenem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n so fixiert, daß für $\nu \geqq n$ gleichzeitig:

$$|A - A_\nu| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |B - B_\nu| < \frac{\varepsilon}{2},$$

so folgt:

$$|(A \pm B) - (A_\nu \pm B_\nu)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu \geqq n,$$

womit die Richtigkeit der ausgesprochenen Behauptung bewiesen ist.

4. Zur Beantwortung der am Schlusse von Nr. 2 aufgestellten Fragen ergeben sich nunmehr die folgenden Sätze:

Satz I. *Es ist:*

$$\text{(I)} \begin{cases} \text{(a)} \quad \{A_\nu\} = \{B_\nu\}, \quad \textit{wenn:} \quad \{A_\nu - B_\nu\} = 0, \\ \text{(b)} \quad \{A_\nu\} \lesseqgtr \{B_\nu\}, \ \textit{je nachdem:} \ \{A_\nu - B_\nu\} \lesseqgtr 0. \end{cases}$$

---

1) Man pflegt diese Bedingung auch in folgender Weise auszusprechen: Die $|A_\nu|$ werden mit unbegrenzt wachsendem ν *beliebig klein.*

2) Z. B. $\left\{\frac{1}{\nu+1}\right\} = 0$, $\left\{\frac{(-1)^\nu}{\nu+1}\right\} = 0$. — Im Anschluß an Gl. (4) sei noch bemerkt, daß aus: $\{A_\nu\} = 0$ stets folgt: $\{C_\nu A_\nu\} = 0$, wenn die $|C_\nu|$ *unterhalb* einer positiven Zahl bleiben. *Umgekehrt* folgt: $\{A_\nu\} = 0$ aus: $\{C_\nu A_\nu\} = 0$, wenn die $|C_\nu|$ *oberhalb* einer positiven Zahl bleiben.

Die Richtigkeit dieser Aussagen geht unmittelbar aus Gl. (5) der vorigen Nummer hervor, wonach ja:

$$\{A_\nu\} - \{B_\nu\} = \{A_\nu - B_\nu\}.$$

Setzt man ferner $A_\nu - B_\nu = -D_\nu$, also $B_\nu = A_\nu + D_\nu$, so kann der Inhalt von Gl. (Ia) auch so formuliert werden:

$$(6) \qquad \{A_\nu\} = \{A_\nu + D_\nu\}, \quad \text{wenn:} \quad \{D_\nu\} = 0,$$

und da es offenbar unbegrenzt viele Zahlenfolgen $\{D_\nu\}$ von der Beschaffenheit gibt, daß $\{D_\nu\} = 0$, so folgt, daß jede rationale Zahl $\{A_\nu\}$ durch *unbegrenzt viele* Zahlenfolgen von der Form $\{A_\nu + D_\nu\}$ darstellbar ist (während umgekehrt jede rational-konvergente Zahlenfolge nur *eine einzige* Rationalzahl darstellt).

Da speziell eine aus lauter gleichen Zahlen A bestehende Zahlenfolge der definierenden Bedingung (1) von Nr. 1 genügt, also rational-konvergent ist und die Zahl A darstellt (in Zeichen: $\{A\} = A$), so folgt, daß man behufs Anwendung der Beziehungen (I) zur Vergleichung einer Rationalzahl A mit einer in der Form $\{B_\nu\}$ vorgelegten die erstere nur in die Form $\{A\}$ zu setzen braucht, daß ferner die Zahl A auch durch alle möglichen Zahlenfolgen von der Form $\{A + D_\nu\}$ dargestellt werden kann und daß umgekehrt in dieser Form alle die Zahl A darstellenden Zahlenfolgen enthalten sind.

Satz II. *Es ist:*

$$(\text{II}) \qquad \{A_\nu\} + \{B_\nu\} = \{A_\nu + B_\nu\}.$$

Die Richtigkeit auch dieses Resultats ist bereits in Gl. (5) der vorigen Nummer enthalten.

Satz III. *Es ist:*

$$(\text{III}) \qquad \{A_\nu\} \cdot \{B_\nu\} = \{A_\nu B_\nu\}.$$

Beweis. Setzt man wiederum:

$\{A_\nu\} = A$, $\{B_\nu\} = B$ (wo eventuell auch $A = 0$ bzw. $B = 0$ sein kann),

so hat man zunächst:

$$AB - A_\nu B_\nu = A(B - B_\nu) + B_\nu(A - A_\nu)$$

und daher:

$$|AB - A_\nu B_\nu| \leqq |A| \cdot |B - B_\nu| + |B_\nu| \cdot |A - A_\nu|.$$

Wie klein auch $\delta > 0$ vorgeschrieben werden möge, so läßt sich n so fixieren, daß für $\nu \geqq n$ gleichzeitig:

$$|A - A_\nu| < \delta, \quad |B - B_\nu| < \delta.$$

Aus der zweiten dieser Ungleichungen folgt dann noch, daß:

$$B - \delta < B_\nu < B + \delta, \quad \text{also:} \quad |B_\nu| < |B| + \delta < |B| + 1,$$

wenn von vornherein $\delta < 1$ angenommen wird. Alsdann ergibt sich aber für $\nu \geqq n$:

$$|AB - A_\nu B_\nu| < \delta(|A| + |B| + 1), \quad \text{d. h.} \quad < \varepsilon,$$

wenn $\varepsilon > 0$ beliebig vorgeschrieben und überdies $\delta \leqq \frac{\varepsilon}{|A| + |B| + 1}$ angenommen wird. Damit ist die Richtigkeit der Behauptung (III) erwiesen.

§ 20. Periodische Systembrüche als Ersatz für rationale Zahlen.

1. Auf Grund der im vorigen Paragraphen getroffenen Festsetzungen läßt sich jetzt das Endresultat von § 18 in folgender Form aussprechen:

Jeder unbegrenzt fortsetzbare periodische Systembruch σ_ν stellt eine und nur eine rationale Zahl σ dar. Umgekehrt ist jede rationale Zahl σ durch einen und nur einen unbegrenzt fortsetzbaren, übrigens stets periodischen Systembruch σ_ν mit vorgeschriebener Basis b darstellbar.

Beweis. Nach § 18, Ungl. (21) (S. 111) gibt es zu jedem periodischen Systembruch σ_ν eine und nur eine Rationalzahl σ, derart, daß:

(1) $$\sigma_\nu < \sigma \leqq \sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

also:

(2) $$|\sigma - \sigma_\nu| \leqq \frac{1}{b^\nu} \leqq \frac{1}{b^n} \quad \text{für} \quad \nu \geqq n.$$

Da aber zu beliebig klein vorgeschriebenem $\varepsilon > 0$ sich n so fixieren läßt, daß $\frac{1}{b^n} < \varepsilon$, so hat man:

(3) $$\{\sigma_\nu\} = \sigma.$$

Ist umgekehrt statt des periodischen Systembruches σ_ν die rationale Zahl σ vorgelegt, so läßt sich nach dem zitierten Satze ein periodischer Systembruch σ_ν angeben, welcher die Relation (1) befriedigt, woraus dann wiederum folgt, daß σ in der Form:

(4) $$\sigma = \{\sigma_\nu\}$$

darstellbar ist. Indessen ist hier noch zu zeigen, daß wirklich nur *ein* solcher Systembruch σ_ν (mit vorgeschriebener Basis b) existiert. Denn aus den bisherigen Betrachtungen folgt nur soviel, daß allemal ein und *nur* ein *der Relation* (1) *genügender* Systembruch σ_ν vorhanden ist; daher

könnte es immerhin *noch andere* unbegrenzt fortsetzbare Systembrüche σ_ν' geben, welche einer Ungleichung von der Form:

$$|\sigma - \sigma_\nu'| < \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu \geqq n$$

genügen, sodaß dann ebenfalls die Beziehung:

$$\sigma = \{\sigma_\nu'\}$$

resultieren würde. Um hierüber vollständige Klarheit zu schaffen, beweisen wir den folgenden, auch später noch zu benützenden *Hilfssatz:*

Sind σ_ν, σ_ν' zwei nicht vollkommen identische (d. h. Glied für Glied übereinstimmende), unbegrenzt fortsetzbare Systembrüche mit derselben Basis b (gleichgültig, ob periodisch oder nicht), so läßt sich eine natürliche Zahl m so fixieren, daß für $\nu \geqq m$ eine der beiden Differenzen $\sigma_\nu' - \sigma_\nu$ bzw. $\sigma_\nu - \sigma_\nu'$ stets oberhalb $\frac{1}{b^m}$ bleibt.

Aus der Voraussetzung, daß σ_ν, σ_ν' nicht vollkommen identisch sein sollen, folgt, daß es einen *ersten* Index k geben muß, bei welchem σ_ν' für $\nu = k$ ein Glied mit *anderem* Zähler enthält, als σ_ν. Dabei sei etwa, um irgendeine Festsetzung zu treffen, der fragliche Zähler von σ_k' der *größere.* Da er alsdann den entsprechenden Zähler von σ_k *mindestens* um 1 übertreffen muß, so hat man zunächst:

$$\sigma_k' \geqq \sigma_k + \frac{1}{b^k}. \tag{5}$$

Da ferner σ_ν' einen *unbegrenzt fortsetzbaren* Systembruch bedeuten sollte, so müssen auch *hinter* der Stelle mit dem Index k noch Glieder vorkommen, die *von Null verschieden* sind. Sei etwa m, wo also $m \geqq k + 1$, der Index des *ersten* solchen Gliedes, so ist:

$$\sigma_m' \geqq \sigma_k' + \frac{1}{b^m} \geqq \sigma_k + \frac{1}{b^k} + \frac{1}{b^m}, \tag{6}$$

und daher für $\nu \geqq m$ *a fortiori:*

$$\sigma_\nu' \geqq \sigma_k + \frac{1}{b^k} + \frac{1}{b^m}. \tag{7}$$

Andererseits hat man für *jedes* $\nu > k$, also sicher auch für $\nu \geqq m$:

$$\sigma_k + \frac{1}{b^k} \geqq \sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu}, \tag{8}$$

folglich:

$$\sigma_\nu' \geqq \sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu} + \frac{1}{b^m} > \sigma_\nu + \frac{1}{b^m}, \tag{9}$$

und somit schließlich:

$$\sigma_\nu' - \sigma_\nu > \frac{1}{b^m} \quad \text{für} \quad \nu \geqq m. \tag{10}$$

Das entsprechende findet offenbar im Falle $\sigma_k > \sigma_k'$ statt. Damit ist aber der ausgesprochene Hilfssatz bewiesen. —

Zunächst folgt nun daraus, daß *niemals gleichzeitig*:

$$\sigma = \{\sigma_\nu\} \quad \text{und} \quad \sigma = \{\sigma_\nu'\}$$

sein kann. Denn alsdann müßte nach Satz I, Gl. (Ia) $\{\sigma_\nu - \sigma_\nu'\} = 0$ sein, also $|\sigma_\nu - \sigma_\nu'|$ für hinlänglich große ν *beliebig klein* werden, während doch soeben gezeigt wurde, daß $|\sigma_\nu - \sigma_\nu'|$ für $\nu \geqq m$ stets oberhalb eines bestimmten Bruches bleibt.

Somit gibt es in der Tat zu jeder rationalen Zahl σ nur *einen einzigen* und zwar allemal *periodischen* Systembruch σ_ν, derart, daß $\sigma = \{\sigma_\nu\}$.[1])

2. Ist $\sigma = \{\sigma_\nu\}$ und:

$$\sigma_\nu = g + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \cdots + \frac{a_\nu}{b^\nu},$$

so pflegt man statt der von uns benutzten Bezeichnung:

$$\sigma = \left\{g + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \cdots + \frac{a_\nu}{b^\nu}\right\}$$

zu schreiben:

$$\sigma = g + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \cdots + \frac{a_\nu}{b^\nu} + \cdots\cdot\cdot$$

(wobei also die Punkte *am Ende* des Systembruches dessen unbegrenzte Fortsetzbarkeit andeuten sollen) und sagt dann gewöhnlich, die rationale Zahl σ werde durch den betreffenden „*unendlichen*" (periodischen) Systembruch *dargestellt*, oder auch umgekehrt, der *wahre Wert* jenes *unendlichen* Systembruches sei die rationale Zahl σ.

Setzt man in den vorstehenden Betrachtungen speziell $b = 10$, so ergeben sich die bekannten Regeln über die Darstellung rationaler Zahlen durch periodische Dezimalbrüche und über die sogenannte Verwandlung periodischer Dezimalbrüche in rationale Zahlen.

Für gewisse analytische Zwecke bietet noch der Spezialfall $b = 2$, also der Fall der „*dyadischen*" Brüche, besonderes Interesse. Diese letz-

---

1) Man kann dieses Ergebnis im Zusammenhange mit dem Endresultat von § 18 (S. 111, Ungl. (21)) auch folgendermaßen aussprechen:

Ist

$$\sigma = \{\sigma_\nu\},$$

so hat man stets:

$$\sigma_\nu < \sigma \leqq \sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu}$$

(wobei das *Gleichheits*zeichen für $\nu \geqq k$, wo $k \geqq 0$, nur dann Geltung hat, wenn σ eine ganze Zahl ist oder als reduzierter Bruch nur Primfaktoren von b im Nenner enthält, also σ_ν die eingliedrige Periode $(b-1)$ besitzt).

teren zeichnen sich, wie es das dyadische System mit sich bringt[1]), insofern durch besondere Einfachheit aus, als für die sämtlichen Teilzähler a_ν nur die Zahlen 0 und 1 zur Verfügung stehen. Im übrigen gelten hier offenbar für jeden reduzierten Bruch $\frac{r}{q}$ die folgenden Sätze:

1) Nur wenn q von der Form 2^m, läßt sich $\frac{r}{q}$ durch einen *begrenzten* dyadischen Bruch darstellen, der auch durch einen *unbegrenzten* mit der Periode 1 ersetzt werden kann, z. B.:

$$\frac{1}{2}\begin{cases}=\frac{1}{2}\\=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots\cdots\end{cases}\quad \frac{1}{4}\begin{cases}=\frac{1}{2^2}\\=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\cdots\cdots\end{cases}\quad \frac{3}{4}\begin{cases}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\\=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots\cdots\end{cases}$$

oder in dyadischer Schreibweise:

$$\frac{1}{2}\begin{cases}=(0{,}1)\\=(0{,}0111\cdots\cdots)\end{cases}\quad \frac{1}{4}\begin{cases}=(0{,}01)\\=(0{,}00111\cdots\cdots)\end{cases}\quad \frac{3}{4}\begin{cases}=(0{,}11)\\=(0{,}10111\cdots\cdots)\end{cases}$$

Speziell ist:

$$\begin{aligned}1&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots\\&=(0{,}111\cdots\cdots).\end{aligned}$$

2) In jedem anderen Falle resultiert ein *periodischer* Bruch mit mindestens zweigliedriger Periode, und zwar ein *rein* periodischer, wenn q *ungerade*, ein *unrein* periodischer, wenn q *gerade*, z. B.:

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots\cdots=(0{,}010101\cdots\cdots)$$
$$\frac{1}{6}=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\cdots\cdots=(0{,}0010101\cdots\cdots).$$

§ 21. Unbegrenzt fortsetzbare nicht-periodische Systembrüche. — Das Radizierungsproblem.

1. Nachdem wir durch die Aufgabe, einen rationalen Bruch in systematischer Form darzustellen, zu dem Begriffe des *unbegrenzt fortsetzbaren periodischen* Systembruches gelangt sind, läge es schon an sich nahe, auch *unbegrenzt fortsetzbare nicht-periodische* Systembrüche[2]) in den Kreis unserer Betrachtung zu ziehen. Auf die Herstellung derartiger Systembrüche wird man aber geradezu mit logischer Notwendigkeit ge-

---

1) Vgl. § 15, Nr. 2 am Schlusse (S. 95).

2) Z. B. 0,12112111211112 · · · · ·; 0,123 · · · 91011 · · · 99100101 · · · · · (usf., d. h. die geordnete Folge der natürlichen Zahlen in dekadischer Schreibweise).

führt, wenn man versucht, auch die Operation des Potenzierens *umzukehren* und zwar zunächst in *der* Weise, daß man den *Potenz*wert und den *Exponenten* als *gegeben*, die *Basis* als vorläufig *unbekannt* ansieht. Es handelt sich also darum, eine Zahl x zu bestimmen, welche der Gleichung genügt:

(1) $$x^m = a.$$

Eine solche Zahl x, *sofern sie überhaupt existiert*, wird m^{te} *Wurzel* aus a genannt, in Zeichen:

(2) $$x = \sqrt[m]{a} \quad (m \geqq 2).$$

Dabei wird m als *Wurzelexponent*, a als der *Radikand*, die durch Gl. (1) geforderte, durch Gl. (2) angedeutete Operation als *Radizierung* bezeichnet.

2. Wir nehmen zunächst m und a als *positive ganze* Zahlen an. Bildet man sodann die Reihe der Zahlen $1^m, 2^m, 3^m, \cdots$, so gelangt man *entweder* zu einer Zahl g^m, derart, daß:

(3) $$g^m = a, \quad \text{also:} \quad \sqrt[m]{a} = g,$$

oder es gibt in jener Reihe *keine* solche Zahl g^m. Dabei wird offenbar der letztere Fall der bei weitem häufigere sein. Denn bedeutet g irgendeine positive ganze Zahl, so hat man mit Benützung des binomischen Satzes $(g+1)^m > g^m + mg^{m-1}$, sodaß also *zwischen* g^m und $(g+1)^m$ *mindestens* mg^{m-1} (für $m > 2$ sogar stets *mehr* als mg^{m-1}) *verschiedene ganze Zahlen* liegen. Fällt also a mit irgendeiner dieser Zwischenzahlen zusammen, so ist die Existenz einer Beziehung von der Form $a = g^m$ allemal ausgeschlossen. Es läßt sich dann aber zunächst zeigen, *daß auch keine gebrochene Zahl* $\frac{p}{q}$ *existieren kann, dergestalt, daß:*

$$\left(\frac{p}{q}\right)^m = a, \quad \text{also:} \quad \frac{p^m}{q^m} = a.$$

Denn da man p und q stets als *relativ prim* annehmen kann, so gilt das gleiche von p^m und q^m, sodaß also $\frac{p^m}{q^m}$ niemals eine *ganze* Zahl a vorstellen kann.

Es wird nun, wenn nicht gerade $a = g^m$, in der Reihe der Zahlen $1^m, 2^m, 3^m, \cdots$ eine und *nur* eine Zahl g^m (wo $g \geqq 1$) geben, derart, daß:

(4) $$g^m < a < (g+1)^m.$$

Bedeutet jetzt wiederum b eine beliebige natürliche Zahl $\geqq 2$, und bildet man die Reihe der Zahlen:

$$g^m, \ \left(g + \frac{1}{b}\right)^m, \ \cdots, \ \left(g + \frac{b-1}{b}\right)^m \ \left(\text{sodaß also: } g + \frac{b-1}{b} + \frac{1}{b} = g + 1\right),$$

so muß sich in derselben eine bestimmte Zahl von der Form $\left(g+\frac{a_1}{b}\right)^m$, wo $0 \leqq a_1 \leqq b-1$, vorfinden, sodaß:

(5) $$\left(g+\frac{a_1}{b}\right)^m < a < \left(g+\frac{a_1+1}{b}\right)^m.$$

Bildet man dann weiter:

$$\left(g+\frac{a_1}{b}\right)^m, \left(g+\frac{a_1}{b}+\frac{1}{b^2}\right)^m, \cdots, \left(g+\frac{a_1}{b}+\frac{b-1}{b^2}\right)^m,$$

so ergibt sich analog:

(6) $$\left(g+\frac{a_1}{b}+\frac{a_2}{b^2}\right)^m < a < \left(g+\frac{a_1}{b}+\frac{a_2+1}{b^2}\right)^m,$$

wo wiederum a_2 eine ganz bestimmte Zahl aus der Reihe $0, 1, \cdots, (b-1)$ bedeutet.

In dieser Weise fortfahrend erhält man offenbar eine unbegrenzt fortsetzbare Folge von Ungleichungen der Form:

(7) $$\sigma_\nu^m < a < \left(\sigma_\nu+\frac{1}{b^\nu}\right)^m \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

wo:

$$\sigma_\nu = g+\frac{a_1}{b}+\cdots+\frac{a_\nu}{b^\nu}$$

und g eine gewisse ganze Zahl, im übrigen $a_1, \cdots, a_\nu$ „Ziffern", d. h. Zahlen aus der Reihe $0, 1, \cdots, (b-1)$ bedeuten.

Man gewinnt also bei dem eben entwickelten Verfahren einen *unbegrenzt fortsetzbaren Systembruch*, dessen m^{te} *Potenz* zur Zahl a in einer ähnlichen Beziehung steht, wie ein *periodischer* Systembruch zu einer bestimmten rationalen Zahl. Es läßt sich aber auch zeigen, daß die Folge der Zahlen σ_ν^m $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ eine *rational-konvergente* ist und daß man daher die Ungleichung (7) geradezu durch die folgende *Gleichung* ersetzen kann:

(8) $$\{\sigma_\nu^m\} = a.$$

3. Um dies nachzuweisen, bringen wir Ungl. (7) zunächst auf die Form:

$$0 < a-\sigma_\nu^m < \left(\sigma_\nu+\frac{1}{b^\nu}\right)^m-\sigma_\nu^m,$$

also:

(9) $$|a-\sigma_\nu^m| < \left|\left(\sigma_\nu+\frac{1}{b^\nu}\right)^m-\sigma_\nu^m\right|.$$

Behufs Umformung der rechten Seite dieser Ungleichung gehen wir aus von der für jedes r geltenden Identität:

$$r^m-1 = (r-1)(r^{m-1}+r^{m-2}+\cdots+r+1).$$

Setzt man $r = \frac{p}{q}$ und multipliziert mit q^m, so folgt daraus:

(10) $$p^m - q^m = (p-q)(p^{m-1} + p^{m-2} \cdot q + \cdots + p \cdot q^{m-2} + q^{m-1})$$

und daher für $p > q > 0$ (wegen: $p^{m-\nu} \cdot q^{\nu-1} < p^{m-1}$ für $\nu = 2, 3, \cdots, m$):

(11) $$|p^m - q^m| = p^m - q^m < (p-q) \cdot m p^{m-1}.$$

Wendet man diese Ungleichung auf die rechte Seite von Ungl. (9) an, so wird:

$$|a - \sigma_\nu^m| < \frac{1}{b^\nu} \cdot m \cdot \left(\sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu}\right)^{m-1}$$
$$\leqq \frac{1}{b^\nu} \cdot m \cdot (g+1)^{m-1}.$$

Wird also n so fixiert, daß:

(12) $$\frac{1}{b^n} < \frac{\varepsilon}{m \cdot (g+1)^{m-1}}$$

$\left(\text{was, wegen } b^n > nb, \text{ sicher der Fall ist, wenn } nb \geqq \frac{m \cdot (g+1)^{m-1}}{\varepsilon}\right)$, so hat man:

(13) $$|a - \sigma_\nu^m| < \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu \geqq n,$$

und somit, wie behauptet:

(14) $$\{\sigma_\nu^m\} = a.$$

4. Während hiernach die Folge der Zahlen σ_ν^m $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ zu den rational-konvergenten gehört, so läßt sich zeigen, daß das gleiche für die Folge der Zahlen σ_ν, also für den *unbegrenzt fortsetzbaren Systembruch* σ_ν *nicht* der Fall ist. Denn wäre etwa:

(15) $$\{\sigma_\nu\} = \sigma \quad (\text{d. h. } \textit{rational}),$$

so fände man durch wiederholte Anwendung des Satzes III von § 19 (S. 116):

$$\{\sigma_\nu\}^m = \{\sigma_\nu^m\},$$

also:

(16) $$\{\sigma_\nu^m\} = \sigma^m.$$

Dann würde aber aus der Vergleichung mit Gl. (14) sich ergeben

$$\sigma^m = a, \quad \text{also:} \quad \sqrt[m]{a} = \sigma,$$

was *der Voraussetzung widerspricht*, wenn σ eine *ganze* Zahl, aber auch, wie bewiesen, *unmöglich* ist, wenn σ ein (unechter) *Bruch* sein sollte.

Der *unbegrenzt fortsetzbare Systembruch* σ_ν kann also in *keinem* Falle eine *rationale* Zahl vorstellen. Daraus folgt zugleich, daß er ein *nicht-periodischer* sein muß.

5. Die soeben angestellte Betrachtung legt nun aber unmittelbar den folgenden Schritt nahe. Angenommen, es gelänge, eine *neue*, also unter den rationalen Zahlen *nicht* vorhandene Zahl S *so* zu definieren, daß für jedes ν:

$$(17)\qquad \sigma_\nu < S < \sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu},$$

so hätte man, falls auch noch S^m in passender Weise definiert werden kann:

$$(18)\qquad \sigma_\nu^m < S^m < \left(\sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu}\right)^m,$$

und daraus, wie oben (vgl. (7), (8) bzw. (14)):

$$(19)\qquad \{\sigma_\nu^m\} = S^m, \quad \text{also:} \quad S^m = a \quad \text{und:} \quad \sqrt[m]{a} = S.$$

Somit würde uns die fragliche Zahl S wirklich die Lösung des vorgelegten Problems liefern. Hierzu wäre nur zu zeigen:

1) Daß die Ungl. (17) wirklich zur *eindeutigen* Definition einer neuen Zahl S ausreicht, d. h. daß jener Zahl S auf Grund der Beziehung (17) ein *eindeutig bestimmter Platz* innerhalb der Gesamtheit der *rationalen* und der *neu zu erschaffenden* Zahlen vom Typus S zukommt.

2) Daß auch S^m in bestimmter Weise und zwar *so* definiert werden kann, daß aus Ungl. (17) allemal das Bestehen von Ungl. (18) folgt, oder, gleich etwas allgemeiner, daß die vier Spezies sich mit Erhaltung ihrer fundamentalen Eigenschaften auf die Zahlen vom Typus S ausdehnen lassen.

Statt nun aber die *nicht-periodischen, unbegrenzt fortsetzbaren Systembrüche* zur Definition jener neuen Zahlen zu benutzen, scheint es zweckmäßig, diese Definition von vornherein an einen etwas *allgemeineren* Typus von *unbegrenzt fortsetzbaren Folgen rationaler Zahlen* anzuknüpfen, in analoger Weise, wie wir oben (§ 19) bei der Einführung neuer Zahlzeichen für die rationalen Zahlen statt der *periodischen Systembrüche* gewisse *allgemeinere Zahlenfolgen* zu Grunde legten. Diese besonderen Zahlenfolgen, welche, wie sich zeigen wird, sowohl die *rational-konvergenten Zahlenfolgen*, als auch die *unbegrenzt fortsetzbaren, nicht-periodischen Systembrüche* als spezielle Fälle umfassen, sollen nunmehr zunächst definiert und auf ihre für uns wesentlichen Eigenschaften untersucht werden.

Kapitel III.

Konvergente Zahlenfolgen, reelle Zahlen und Grenzwerte reeller Zahlen.

§ 22. Definition und allgemeine Eigenschaften konvergenter Zahlenfolgen.

1. Es werde mit $c_0, c_1, \cdots, c_\nu, \cdots$ oder, kürzer geschrieben, mit (c_ν) eine nach irgendwelcher Rechenvorschrift unbegrenzt fortsetzbare Folge rationaler Zahlen bezeichnet.[1]) Läßt sich alsdann *jeder*, insbesondere also jeder *noch so kleinen* positiven Zahl ε eine natürliche Zahl n so zuordnen, daß:

(I) $$|c_{n+\varrho} - c_n| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad \varrho = 1, 2, 3, \cdots,$$

so soll:

$$(c_0, c_1, \cdots, c_\nu, \cdots\cdots) \quad \text{oder, kürzer geschrieben:} \quad [c_\nu]\ ^{2)}$$

eine *konvergente (rationale) Zahlenfolge* heißen.

Es verdient zunächst bemerkt zu werden, daß man die *definierende Ungleichung* (I) auch durch jede der beiden folgenden ersetzen kann:

(II) $$|c_{n+\varrho} - c_n| < \varepsilon \quad \textit{(mit Ausschluß der Gleichheit)}$$

oder:

(III) $$|c_{\nu+\varrho} - c_\nu| < \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu \geqq n, \quad \varrho = 1, 2, 3, \cdots,$$

welche *mehr* zu verlangen *scheinen*, als Ungl. (I), in Wahrheit aber *stets erfüllt* (genauer gesagt: durch geeignete Bestimmung von n *stets erfüllbar*) sind, sodaß man sie gleichfalls als *Definitionen* für die Konvergenz der Zahlenfolge (c_ν) ansehen kann, ohne daß hierdurch der Kreis der zulässigen c_ν mehr eingeschränkt wird, als durch die Bedingung (I).

---

1) Während in den beiden ersten Kapiteln kleine lateinische Buchstaben immer *natürliche* Zahlen, kleine griechische *positive rationale*, große lateinische *rationale Zahlen beliebigen Vorzeichens* bedeuteten, wird von jetzt ab diese Unterscheidung aufgegeben und, soweit erforderlich, von Fall zu Fall ausdrücklich erklärt, welche Art von Zahlen durch irgendwelche Buchstaben repräsentiert wird.

2) Es bedeutet also allemal das Zeichen $[c_\nu]$ eine bereits als *konvergent erkannte* Zahlenfolge, während (c_ν) eine Zahlenfolge bedeutet, die eventuell auch konvergent sein *kann*, deren Konvergenz indessen noch nicht feststeht.

Nimmt man nämlich eine positive Zahl $\delta < \varepsilon$ an, so kann man, wenn nur die Bedingung (I) besteht, n so fixieren, daß:

$$|c_{n+\varrho} - c_n| \leqq \delta \quad (\varrho = 1, 2, 3, \cdots),$$

so daß also sicher:

$$|c_{n+\varrho} - c_n| < \varepsilon \quad (\varrho = 1, 2, 3, \cdots),$$

in Übereinstimmung mit (II). (NB. Die Zahl n in (II) wird natürlich im allgemeinen eine *andere*, nämlich *größere* sein, als diejenige in (I). Das ist aber offenbar unwesentlich, es kommt immer nur darauf an, daß sich jedem $\varepsilon > 0$ *irgendein* positives ganzzahliges n zuordnen läßt, derart, daß die in Frage kommende Beziehung erfüllt ist.)

Besteht nun aber die Bedingung (II), so kann man auch n *so* fixieren, daß:

$$|c_{n+\varrho} - c_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\varrho = 1, 2, 3, \cdots),$$

und daher:

$$|c_\nu - c_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für:} \quad \nu \geqq n,$$

$$|c_{\nu+\varrho} - c_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für:} \quad \nu \geqq n, \ \varrho = 1, 2, 3, \cdots.$$

Da aber[1]):

$$|(c_{\nu+\varrho} - c_n) - (c_\nu - c_n)| \leqq |c_{\nu+\varrho} - c_n| + |c_\nu - c_n|,$$

so folgt schließlich:

$$|c_{\nu+\varrho} - c_\nu| < \varepsilon \quad \text{für:} \quad \nu \geqq n, \ \varrho = 1, 2, 3, \cdots,$$

d. h. es besteht dann allemal auch eine Beziehung von der Form (III).

Daß *umgekehrt* auch (II) erfüllt ist, wenn (III) besteht, erkennt man unmittelbar, wenn man in (III) speziell $\nu = n$ setzt. Sodann ist aber auch (I) *a fortiori* erfüllt.

Hiernach sind also die Bedingungen (I)—(III) bezüglich ihrer Tragweite als völlig *äquivalent* zu betrachten, und es steht daher vollkommen frei, je nach Bequemlichkeit, sich der einen oder anderen zu bedienen.

2. Offenbar sind die in § 19 eingeführten *rational-konvergenten* Zahlenfolgen $\{c_\nu\} = c$ auch schlechthin *konvergente* Folgen.[2]) Denn aus:

$$|c - c_\nu| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für:} \quad \nu \geqq n$$

---

1) S. § 12, Nr. 5 (S. 75).

2) Es bedeutet also $\{c_\nu\}$ eine bereits als *rational-konvergent erkannte* Zahlenfolge, $[c_\nu]$ eine *konvergente* Zahlenfolge, die möglicherweise auch *rational-konvergent* sein *kann*.

folgt:

$$|c - c_{\nu+\varrho}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für:} \quad \nu \geqq n, \ \varrho = 1, 2, 3, \cdots$$

und daher wegen $|c_{\nu+\varrho} - c_\nu| = |(c - c_\nu) - (c - c_{\nu+\varrho})|$:

$$|c_{\nu+\varrho} - c_\nu| < \varepsilon \quad \text{für:} \quad \nu \geqq n, \ \varrho = 1, 2, 3, \cdots.$$

Bedeutet ferner σ_ν einen beliebigen (d. h. gleichgültig, ob periodischen oder nicht-periodischen) *unbegrenzt fortsetzbaren Systembruch*, so hat man:

$$0 < \sigma_{\nu+\varrho} - \sigma_\nu = \frac{a_{\nu+1}}{b^{\nu+1}} + \cdots + \frac{a_{\nu+\varrho}}{b^{\nu+\varrho}} \quad (\varrho = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$< \frac{1}{b^\nu}, \quad \text{also auch:} \quad < \frac{1}{b^n} \quad \text{für:} \quad \nu \geqq n,$$

und daher:

$$|\sigma_{\nu+\varrho} - \sigma_\nu| < \varepsilon \quad \text{für:} \quad \nu \geqq n, \ \varrho = 1, 2, 3, \cdots,$$

wenn nur n wiederum so fixiert wird, daß $\frac{1}{b^n} \leqq \varepsilon$. Somit liefert *jeder unbegrenzt fortsetzbare Systembruch* σ_ν eine *konvergente* Folge $[\sigma_\nu]$.

3. Die Zahlen c_ν einer *konvergenten* Folge müssen, zum mindesten von einer bestimmten Stelle ab, *sämtlich positiv* oder *sämtlich negativ* sein, außer wenn ihre absoluten Beträge mit unbegrenzt wachsendem ν *beliebig klein* (s. S. 115, Fußn. 1) werden.

Haben nämlich die c_ν *nicht* von irgendeiner Stelle ab *dasselbe* Vorzeichen, so müssen zu *jedem* c_ν noch *unbegrenzt viele* $c_{\nu+\varrho}$ mit *entgegengesetztem* Vorzeichen, also mit dem Vorzeichen von $-c_\nu$ existieren, und man hat daher für *jedes* ν und *unbegrenzt viele* ϱ:

$$|c_{\nu+\varrho} - c_\nu| = |c_{\nu+\varrho}| + |c_\nu| > |c_\nu|.$$

Soll also für $\nu \geqq n$ durchweg:

$$|c_{\nu+\varrho} - c_\nu| < \varepsilon$$

ausfallen, so ist dies nur möglich, wenn für $\nu \geqq n$ durchweg:

$$|c_\nu| < \varepsilon.$$

Hiernach kann bei einer konvergenten Folge der Fall *unbegrenzt vieler Zeichenwechsel* nur dann eintreten, wenn die $|c_\nu|$ mit unbegrenzt wachsendem ν *beliebig klein* werden, oder anders ausgedrückt, wenn:

$$[c_\nu] = \{c_\nu\} = 0.$$

Also: *Eine konvergente Zahlenfolge mit unbegrenzt vielen Zeichenwechseln ist stets null-konvergent.*

4. Betrachten wir jetzt eine Zahlenfolge, deren Glieder c_ν von irgendeiner bestimmten Stelle ab dasselbe, etwa das *positive* Vorzeichen haben. Alsdann *kann* ebenfalls der besondere Fall eintreten, daß die c_ν mit unbegrenzt wachsendem ν *beliebig klein* werden, daß also wiederum:

$$[c_\nu] = \{c_\nu\} = 0.$$

In jedem anderen Falle muß es eine gewisse positive Zahl α geben, derart, daß unter den Zahlen c_ν, wie weit man dieselben auch verfolgen mag, stets *solche vorhanden sind*, für welche $c_\nu \geqq \alpha$. Nun nehme man eine positive Zahl ε beliebig, aber jedenfalls $< \alpha$ an und ordne ihr eine positive ganze Zahl n so zu, daß:

$$|c_{\nu+\varrho} - c_\nu| < \varepsilon \quad \text{für:} \quad \nu \geqq n, \; \varrho = 1, 2, 3, \cdots.$$

Alsdann hat man, wenn r eine solche ganze Zahl $\geqq n$ bedeutet, daß speziell $c_r \geqq \alpha$, auch:

$$|c_{r+\varrho} - c_r| < \varepsilon,$$

also:

$$-\varepsilon < c_{r+\varrho} - c_r < \varepsilon$$

und daher:

$$c_r - \varepsilon < c_{r+\varrho} < c_r + \varepsilon \quad (\varrho = 1, 2, 3, \cdots). \tag{1}$$

Die *beiden* äußeren Glieder dieser Ungleichung sind bestimmte *positive* Zahlen, da ja $\varepsilon < \alpha \leqq c_r$. Im übrigen steht es frei, ε *beliebig klein* anzunehmen, sodaß die beiden Zahlen $c_r - \varepsilon$ und $c_r + \varepsilon$ sich *beliebig wenig* voneinander unterscheiden.[1])

Da das analoge offenbar für konvergente Zahlenfolgen mit schließlich *negativem* Vorzeichen gilt, so läßt sich das Ergebnis der in Nr. 3 und 4 angestellten Betrachtungen folgendermaßen aussprechen:

Ist die konvergente Zahlenfolge $[c_\nu]$ keine null-konvergente, so gibt es (unbegrenzt viele) Paare von positiven, beliebig wenig voneinander verschiedenen rationalen Zahlen c', c'', dergestalt, daß für alle ν, die eine gewisse natürliche Zahl r erreichen oder übersteigen, also für $\nu \geqq r$, eine der Beziehungen besteht:

$$c' < c_\nu < c'' \quad \text{bzw.} \quad -c'' < c_\nu < -c'. \tag{2}$$

---

1) Man kann den einschließenden Schranken $c_r - \varepsilon$ und $c_r + \varepsilon$ auch eine Form geben, welche zum Ausdruck bringt, daß jene beiden Zahlen nicht nur *überhaupt*, sondern auch *im Verhältnis zu ihrer eigenen Größe* sich *beliebig wenig* voneinander unterscheiden (was zuweilen nützlich erscheint, zumal wenn c_r selbst *sehr klein* ist). Wird nämlich ein positiver echter Bruch δ *beliebig klein* angenommen und sodann $\varepsilon = \delta \cdot \alpha$ gesetzt, so findet man:

$$c_r - \varepsilon = c_r - \delta\alpha \geqq (1 - \delta) \cdot c_r$$
$$c_r + \varepsilon = c_r + \delta\alpha \leqq (1 + \delta) \cdot c_r.$$

Hieraus, im Zusammenhange mit der Tatsache, daß die absoluten Beträge der Glieder einer null-konvergenten Zahlenfolge schließlich beliebig klein werden, folgt weiter:

Die absoluten Beträge der Glieder c_ν einer konvergenten Zahlenfolge bleiben stets unterhalb und, wenn die Folge keine null-konvergente ist, zum mindesten von einer bestimmten Stelle ab[1]*, auch oberhalb einer positiven Zahl.*

5. Satz. *Die Konvergenz einer Folge $[c_\nu]$ wird nicht beeinträchtigt, wenn man eine begrenzte oder unbegrenzte Menge von Gliedern c_ν wegläßt oder die Glieder einer beliebigen Umordnung unterwirft.*

Der erste Teil dieses Satzes kann auch folgendermaßen ausgesprochen werden:

Mit der Zahlenfolge $[c_\nu]$ konvergiert auch jede aus ihr herausgehobene Folge.

Beweis. Da die Definition der Konvergenz einer Zahlenfolge nur über diejenigen Glieder etwas aussagt, deren Index eine gewisse (übrigens beliebig *groß* zu denkende) Zahl übersteigt, so folgt unmittelbar, daß die *Weglassung*[2] einer *begrenzten* Anzahl von Gliedern auf die Konvergenz der Folge keinerlei Einfluß übt.

Es bedeute nun ferner $m_0, m_1, \cdots, m_\nu, \cdots$ eine unbegrenzte Folge aus der Reihe $0, 1, 2, \cdots$ *herausgehobener* wachsender Zahlen. Man hat alsdann ausnahmslos $m_\nu \geqq \nu$ und zum mindesten von einer bestimmten Stelle ab sogar $m_\nu > \nu$ (mit *Ausschluß* der *Gleichheit*). Aus der Beziehung:

$$|c_{\nu+\varrho} - c_\nu| < \varepsilon \quad \text{für:} \quad \nu \geqq n, \ \varrho = 1, 2, 3, \cdots$$

folgt daher *a fortiori:*

$$|c_{m_{\nu+\varrho}} - c_{m_\nu}| < \varepsilon \quad \text{für:} \quad \nu \geqq n, \ \varrho = 1, 2, 3, \cdots,$$

d. h. die Folge $(c_{m_0}, c_{m_1}, \cdots, c_{m_\nu}, \cdots)$, also jede aus der Folge $[c_\nu]$ durch Weglassung beliebig vieler Glieder entstehende (bzw. herausgehobene) Folge ist in der Tat konvergent.

Es bedeute ferner $(c_0', c_1', \cdots, c_\nu', \cdots)$ eine Zahlenfolge, die aus der Folge $(c_0, c_1, \cdots, c_\nu, \cdots)$ durch eine bloße *Umordnung* der Glieder hervorgegangen ist. Wird dann m zu beliebig vorgeschriebenem $\varepsilon > 0$ so fixiert, daß:

$$|c_{\nu+\varrho} - c_\nu| < \varepsilon \quad \text{für:} \quad \nu \geqq m, \ \varrho = 1, 2, 3, \cdots,$$

1) Die Folge könnte ja, ohne eine *null-konvergente* zu sein, ein oder mehrere Male die *Null* als Glied enthalten.

2) Offenbar könnte man auch eine begrenzte Anzahl von Gliedern beliebig *abändern*, ohne die Konvergenz zu beeinträchtigen.

so nehme man n so groß an, daß in der Reihe der Zahlen $c_0', c_1', \cdots, c_{n-1}'$ die *sämtlichen* Zahlen $c_0, c_1, \cdots, c_{m-1}$ vorkommen und daher die Folge $c_n', c_{n+1}', \cdots$ nur solche Zahlen enthält, welche der Folge $c_m, c_{m+1}, \cdots$ angehören, mit anderen Worten solche c_ν, für welche $\nu \geqq m$. Alsdann folgt aber, daß:

$$|c_{\nu+\varrho}' - c_\nu'| < \varepsilon \quad \text{für:} \quad \nu \geqq n, \ \varrho = 1, 2, 3, \cdots,$$

womit die Konvergenz der aus der Folge $[c_\nu]$ durch Umordnung entstandenen Folge der c_ν' erwiesen ist.

6. Eine Folge von Zahlen a_ν, welche durchweg einer der Bedingungen genügt:

$$(3) \qquad a_{\nu+1} - a_\nu \geqq 0 \quad \text{bzw.} \quad a_{\nu+1} - a_\nu \leqq 0,$$

soll *monoton* und zwar im ersten Falle *niemals abnehmend*, im zweiten *niemals zunehmend* heißen. Ist durchweg:

$$(4) \qquad a_{\nu+1} - a_\nu > 0 \quad \text{bzw.} \quad a_{\nu+1} - a_\nu < 0$$

(mit *Ausschluß* der *Gleichheit*), so heißt die Folge *monoton zunehmend* bzw. *monoton abnehmend.*

Beispiele monotoner, *niemals abnehmender* Folgen bilden alle unbegrenzt fortsetzbaren Systembrüche σ_ν $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$, Beispiele *niemals zunehmender* Folgen alle Systembrüche mit um 1 vermehrtem Endzähler, also die Zahlen von der Form $\sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu}$. Denn nach § 16, Ungl. (7) (S. 97) hat man stets $\sigma_\nu \leqq \sigma_{\nu+1}$, dagegen $\sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu} \geqq \sigma_{\nu+1} + \frac{1}{b^{\nu+1}}$.

Für solche *monotone* Zahlenfolgen gibt es ein überaus einfaches Kennzeichen der Konvergenz; es gilt nämlich der Satz:

Sind die Zahlen a_ν zum mindesten für $\nu \geqq m$ monoton und bleiben ihre absoluten Beträge unter einer endlichen Schranke, etwa $|a_\nu| < g$, so ist die Folge der a_ν eine konvergente.

Beweis. Es seien, um eine Festsetzung zu treffen, die a_ν für $\nu \geqq m$ *niemals abnehmend*, also $a_{\nu+1} - a_\nu \geqq 0$. (NB. Die a_ν können dabei positiv oder negativ sein.) Angenommen nun, die Folge (a_ν) wäre *keine* konvergente, so müßte es eine positive Zahl α geben, derart, daß zu dem Gliede a_ν, *wie groß* auch ν angenommen werden möge, *immer* noch ein späteres Glied $a_{\nu+\varrho}$ existiert, für welches die (nach Voraussetzung nicht negative und bei Vergrößerung von ϱ niemals abnehmende) Differenz $a_{\nu+\varrho} - a_\nu$ nicht unter jener positiven Zahl α liegt, also: $a_{\nu+\varrho} - a_\nu \geqq \alpha$. Man könnte also aus der Folge (a_ν) eine *unbegrenzt* fortsetzbare Folge

von Gliedern $a_n, a_{n+\varrho_1}, a_{n+\varrho_2}, \cdots, a_{n+\varrho_k}, \cdots$ herausheben, dergestalt, daß:

$$\begin{aligned} a_{n+\varrho_1} - a_n &\geqq \alpha \\ a_{n+\varrho_2} - a_{n+\varrho_1} &\geqq \alpha \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n+\varrho_k} - a_{n+\varrho_{k-1}} &\geqq \alpha . \end{aligned}$$

Durch Addition dieser Ungleichungen würde sich sodann ergeben:

$$a_{n+\varrho_k} - a_n \geqq k\alpha,$$

also:

$$a_{n+\varrho_k} \geqq a_n + k\alpha,$$

d. h. $a_{n+\varrho_k}$ müßte, da es ja freisteht, k, also auch $k\alpha$, unbegrenzt zu vergrößern, schließlich jede noch so große positive Zahl übersteigen, was der Voraussetzung $|a_{n+\varrho_k}| < g$ widerspricht. Somit war die obige Annahme unzulässig, d. h. die Folge der a_ν muß eine *konvergente* sein.

Für eine *niemals zunehmende* Folge (b_ν) folgt dann die Richtigkeit unserer Behauptung unmittelbar aus der Bemerkung, daß ja die Folge $(-b_\nu)$ eine *niemals abnehmende*, also *konvergente* ist, sofern nur $|b_\nu| < g$. Gleichzeitig mit der Folge $(-b_\nu)$ ist aber allemal auch die Folge (b_ν) eine *konvergente*, da ja:

$$|b_{\nu+\varrho} - b_\nu| = |-b_{\nu+\varrho} + b_\nu| = |(-b_{\nu+\varrho}) - (-b_\nu)|.$$

7. Satz. *Hat man zwei konvergente Zahlenfolgen* $[a_\nu]$, $[b_\nu]$, *so konvergieren auch die Zahlenfolgen:*

$$(a_\nu + b_\nu), \quad (a_\nu - b_\nu), \quad (a_\nu b_\nu)$$

und, falls die Folge $[b_\nu]$ *keine null-konvergente und kein einzelnes* $b_\nu = 0$ *ist, auch die Zahlenfolge:*

$$\left(\frac{a_\nu}{b_\nu}\right).$$

Beweis. Setzt man:

$$a_\nu \pm b_\nu = c_\nu,$$

so folgt:

$$c_{\nu+\varrho} - c_\nu = (a_{\nu+\varrho} - a_\nu) \pm (b_{\nu+\varrho} - b_\nu)$$

Wegen der Konvergenz der Folgen $[a_\nu]$, $[b_\nu]$ läßt sich n zu jedem $\varepsilon > 0$ so fixieren, daß gleichzeitig:

$$|a_{\nu+\varrho} - a_\nu| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |b_{\nu+\varrho} - b_\nu| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für:} \quad \nu \geqq n, \ \varrho = 1, 2, 3, \cdots$$

und daher in demselben Umfange:

(5) $$|c_{\nu+\varrho} - c_\nu| \leqq |a_{\nu+\varrho} - a_\nu| + |b_{\nu+\varrho} - b_\nu| < \varepsilon,$$

sodaß also die Folge der c_ν, d. h. der $a_\nu + b_\nu$ bzw. $a_\nu - b_\nu$ *konvergent* ist.

Setzt man *zweitens*:

$$a_\nu b_\nu = c_\nu,$$

so folgt:

$$c_{\nu+\varrho} - c_\nu = a_{\nu+\varrho} b_{\nu+\varrho} - a_\nu b_\nu$$
$$= b_{\nu+\varrho}(a_{\nu+\varrho} - a_\nu) + a_\nu(b_{\nu+\varrho} - b_\nu).$$

Aus der Konvergenz der Folgen $[a_\nu]$, $[b_\nu]$ ergibt sich (s. Nr. 4 am Schlusse), daß die $|a_\nu|$, $|b_\nu|$ durchweg unter einer endlichen Schranke bleiben, etwa:

$$|a_\nu| < g, \quad |b_{\nu+\varrho}| < g,$$

und daher:

$$|c_{\nu+\varrho} - c_\nu| < g(|a_{\nu+\varrho} - a_\nu| + |b_{\nu+\varrho} - b_\nu|).$$

Wird jetzt n so gewählt, daß gleichzeitig:

$$|a_{\nu+\varrho} - a_\nu| < \frac{\varepsilon}{2g}, \quad |b_{\nu+\varrho} - b_\nu| < \frac{\varepsilon}{2g} \quad \text{für} \quad \nu \geqq n, \quad \varrho = 1, 2, 3, \cdots,$$

so folgt, daß in demselben Umfange:

$$|c_{\nu+\varrho} - c_\nu| < \varepsilon,$$

also die Folge der c_ν, d. h. der $a_\nu b_\nu$ *konvergent* ist. —

Wird jetzt ausdrücklich vorausgesetzt, daß die b_ν durchweg von Null verschieden und daß die Folge $[b_\nu]$ keine null-konvergente ist, so folgt, daß die $\frac{1}{b_\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ durchweg bestimmte Zahlen sind, deren absolute Beträge *unterhalb* einer gewissen Schranke bleiben (da ja nach dem Schlußsatze von Nr. 4 die $|b_\nu|$ *oberhalb* einer positiven Zahl bleiben müssen), etwa:

$$\left|\frac{1}{b_\nu}\right| < g'.$$

Man findet sodann:

$$\left|\frac{1}{b_{\nu+\varrho}} - \frac{1}{b_\nu}\right| = \left|\frac{1}{b_\nu b_{\nu+\varrho}}(b_\nu - b_{\nu+\varrho})\right| < g'^2 \cdot |b_{\nu+\varrho} - b_\nu|$$
$$< \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu \geqq n,$$

wenn n so fixiert wird, daß:

$$|b_{\nu+\varrho} - b_\nu| < \frac{\varepsilon}{g'^2} \quad \text{für} \quad \nu \geqq n.$$

Somit ist unter den bezüglich der b_ν gemachten Einschränkungen gleichzeitig mit der Folge der b_ν auch diejenige der $\frac{1}{b_\nu}$ eine *konvergente.*

Wegen $\frac{a_\nu}{b_\nu} = a_\nu \cdot \frac{1}{b_\nu}$ ergibt sich dann schließlich mit Hilfe des unmittelbar zuvor gefundenen Resultats auch die Konvergenz der Folge $\left(\frac{a_\nu}{b_\nu}\right)$.

Zusatz. Setzt man $a_\nu = a$ (für jedes ν), was gestattet ist, da ja eine Folge aus lauter *gleichen* Gliedern a offenbar *konvergent* (sogar *rational-konvergent*) ist, so ergeben sich noch die folgenden Spezialsätze:

Ist $[b_\nu]$ *eine konvergente Folge, a eine von Null verschiedene Zahl, so sind auch* $(a \pm b_\nu)$, (ab_ν), $\left(\frac{b_\nu}{a}\right)$ *konvergente Zahlenfolgen und, unter den oben bezüglich der b_ν gemachten Einschränkungen, auch* $\left(\frac{a}{b_\nu}\right)$.

8. Die in der vorigen Nummer bewiesenen Sätze über Addition und Multiplikation lassen sich ohne weiteres auf eine beliebige Anzahl konvergenter Zahlenfolgen übertragen. Insbesondere folgt durch $(m-1)$-malige Anwendung des Multiplikationssatzes auf die Zahlenfolge $[a_\nu]$, sowie des Satzes über die Konvergenz von $\left(\frac{1}{b_\nu}\right)$ bei Voraussetzung der Konvergenz von (b_ν) und gewissen Einschränkungen:

Ist m eine natürliche Zahl, so konvergiert gleichzeitig mit der Folge (a_ν) auch die Folge (a_ν^m); ebenso die Folge (a_ν^{-m}), wenn die a_ν durchweg von Null verschieden und die Folge der a_ν keine null-konvergente ist.

Auch lassen sich offenbar die Resultate, die sich auf die Konvergenz von Zahlenfolgen der Form $(a_\nu \pm b_\nu)$, $(a_\nu b_\nu)$, $\left(\frac{a_\nu}{b_\nu}\right)$ beziehen, auf solche Zahlenfolgen übertragen, deren Glieder durch *kombinierte* Anwendung *verschiedener* rationaler Rechnungsoperationen aus den Gliedern konvergenter Zahlenfolgen hergestellt sind. Versteht man etwa unter einem *begrenzten rationalen Ausdruck* $R(a_\nu, b_\nu, \cdots, k_\nu)$ eine Verbindung der Zahlen $a_\nu, b_\nu, \cdots, k_\nu$ (für jedes einzelne $\nu = 0, 1, 2, \cdots$) und eventuell einer gewissen Anzahl fester (d. h. von ν unabhängiger) Zahlen mit Hilfe einer bestimmten (d. h. wiederum von ν unabhängigen[1])) Anzahl für jedes ν unveränderlicher *rationaler Operationen*, so gelangt man durch

1) Es darf also insbesondere ν bei der Bildung von R nicht als Exponent der a_ν, b_ν, $\cdots$ auftreten. Ist z. B. $a_\nu = 1 + \frac{1}{\nu}$, so gehört der Ausdruck $\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu$ *nicht* der Form $R(a_\nu)$ an, sodaß also aus der Konvergenz der Folge $\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)$ *nicht* ohne weiteres auf diejenige von $\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu$ geschlossen werden darf. (NB. Dagegen kann ν sehr wohl in den einzelnen a_ν, b_ν, $\cdots$ als Exponent von Zahlen auftreten, die von ν unabhängig sind, z. B.:

$$a_\nu = \frac{2^{\nu+1}}{2^\nu + 1}, \quad b_\nu = \frac{\nu + (-1)^\nu}{\nu + 1} \quad \text{usf.}).$$

fortgesetzte Anwendung der vorstehenden Ergebnisse zu dem folgenden allgemeinen Satze, welcher jene ersteren als spezielle Fälle enthält:

Sind die Folgen $(a_\nu), (b_\nu), \cdots, (k_\nu)$ *konvergent und bedeutet* $R(a_\nu, b_\nu, \cdots, k_\nu)$ *einen begrenzten rationalen Ausdruck, so ist auch* $(R(a_\nu, b_\nu, \cdots, k_\nu))$ *eine konvergente Folge, vorausgesetzt, daß keiner der in* $R(a_\nu, b_\nu, \cdots, k_\nu)$ *auftretenden Nenner Null ist oder einer null-konvergenten Folge angehört.*

§ 23. Definition der allgemeinen reellen Zahlen durch konvergente Zahlenfolgen. — Die vier Spezies mit reellen Zahlen.

1. In § 19 wurde gezeigt, wie man die *rational-konvergenten* Zahlenfolgen, die ja nur besondere Typen der schlechthin konvergenten Zahlenfolgen bilden, als *Ersatz*, d. h. als *neue Zeichen* für *rationale Zahlen* einschließlich *Null* verwenden kann. Wir machen nun den analogen Schritt, wie bei der Einführung der rationalen Brüche (§ 8, S. 42) und der allgemeinen Differenzensymbole (§ 11, S. 56): wir führen *alle möglichen konvergenten* Folgen $[c_\nu]$ als *neue Zahlzeichen* ein. Sind die betreffenden Folgen *rational-konvergent*, in welchem Falle wir von jetzt ab statt der bisher benützten spezielleren Bezeichnung $\{c_\nu\}$ die für *alle* konvergenten Folgen eingeführte $[c_\nu]$ gebrauchen wollen, ist also:

$$[c_\nu] = c \text{ (d. h. eine rationale Zahl),}$$

so bestehen für die *Vergleichung* solcher Zahlzeichen und für das *Rechnen* mit ihnen bereits die in § 19, Nr. 2—4 angegebenen Regeln, welche in Wahrheit lediglich *Übertragungen* der für rationale Zahlen bzw. Null geltenden Gesetze in die neue *Schreibweise* sind. Wir setzen nun fest, daß diese Regeln für *alle* Zahlen von der Form $[c_\nu]$ Geltung haben sollen, mit anderen Worten: wir *definieren* für den Fall, daß mindestens eine der zwei Zahlen $[c_\nu]$, $[c_\nu']$ keine rationale Zahl (einschließlich der Null) sein sollte, deren *Gleichheit* bzw. *Ungleichheit*, sowie ihre *Addition* und *Multiplikation* durch die in § 19, Nr. 4 (S. 115, 116) mit (I)—(III) bezeichneten Formeln. Zur Durchführung dieses Prinzips bedarf es nur noch der folgenden Bemerkung. Ist die Folge der c_ν eine *rational-konvergente*, jedoch *nicht null-konvergent*, so stellt $[c_\nu]$ eine bestimmte *positive* oder *negative* rationale Zahl dar, es besteht also unzweideutig eine der beiden Beziehungen:

$$(1) \qquad [c_\nu] > 0 \quad \text{bzw.} \quad [c_\nu] < 0.$$

Ein sicheres *Kennzeichen* dafür, welcher der beiden Fälle eintritt, bildet, auch wenn man die *gewöhnliche* Form der rationalen Zahl c (als ganze Zahl oder reduzierten Bruch) gar nicht kennt, der Umstand, daß *alle* c_ν,

zum mindesten von einer bestimmten Stelle ab, im ersten Falle durchweg *positiv*, im zweiten durchweg *negativ* sind. Da aber diese Konstanz des Vorzeichens nach § 22, Nr. 3 (S. 127) bei *allen konvergenten* Folgen außer den *null-konvergenten* vorhanden ist, so hat sie auf Grund unseres Prinzips geradezu als *Definition* für den Inhalt der Ungleichungen (1) zu dienen, falls die Folge der c_ν keine rational-konvergente ist.

2. Hiernach ergibt sich jetzt folgendes. Das Zeichen $[c_\nu]$ jeder beliebigen *konvergenten* Folge rationaler Zahlen c_ν $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ gilt als Zeichen für eine bestimmte *Zahl* und zwar hat man auf Grund bereits früher getroffener Festsetzungen (s. § 19, Nr. 3, Gl. (4), S. 115):

$$[c_\nu] = 0,$$

wenn die $|c_\nu|$ mit unbegrenzt wachsendem Index *beliebig klein* werden. In jedem anderen Falle hat man:

$$[c_\nu] > 0 \quad \text{oder} \quad [c_\nu] < 0,$$

je nachdem die c_ν, zum mindesten von einer bestimmten Stelle ab, *durchweg positiv* oder *durchweg negativ* sind.[1])

Zur Vergleichung zweier solcher Zahlen $[c_\nu]$, $[c_\nu']$ dienen dann die in § 19, Nr. 4 (S. 115) für den Fall rational-konvergenter Folgen bereits bestehenden Regeln (I), also:

Es ist:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \text{(a)} \quad [c_\nu] = [c_\nu'], \quad \textit{wenn:} \quad [c_\nu - c_\nu'] = 0, \\ \text{(b)} \quad [c_\nu] \lesseqgtr [c_\nu'], \quad \textit{je nachdem:} \quad [c_\nu - c_\nu'] \lesseqgtr 0.^{2)} \end{cases}$$

Um diese Formeln auch auf den Fall anzuwenden, daß an die Stelle von $[c_\nu']$ eine rationale Zahl c' in der gewöhnlichen Form tritt, hat man, wie bereits bei Gelegenheit der analogen Betrachtungen über rational-konvergente Folgen erörtert wurde, c' als durch eine Folge von lauter

---

1) Jede andere Möglichkeit ist ja wegen der vorausgesetzten *Konvergenz* der Folge nach § 22, Nr. 3 definitiv ausgeschlossen.

2) Man erkennt ohne weiteres, daß diese Definitionen der Gleichheit bzw. Ungleichheit *widerspruchsfrei* sind, d. h. aus:

$$[c_\nu] = [c_\nu'], \quad [c_\nu'] = [c_\nu'']$$

folgt auf Grund der Definition (Ia), daß auch:

$$[c_\nu] = [c_\nu''].$$

Analog folgt aus:

$$[c_\nu] < [c_\nu'], \quad [c_\nu'] \leq [c_\nu''],$$

daß:

$$[c_\nu] < [c_\nu''] \quad \text{usf.}$$

gleichen Gliedern c' definiert anzusehen, also das Zeichen c' durch $[c']$ zu ersetzen. Man findet somit:

$$(\mathrm{I}^{\mathrm{bis}}) \qquad [c_\nu]\left\{\lesseqgtr\right\}c', \quad \textit{je nachdem:} \quad [c_\nu - c']\left\{\lesseqgtr\right\}0.$$

Jede durch eine konvergente Folge rationaler Zahlen definierte bzw. definierbare Zahl soll eine *reelle Zahl* heißen. Die Menge der *reellen Zahlen* (welche nach dem bisher gesagten auch diejenige der *rationalen Zahlen* einschließlich der *Null* enthält) ist auf Grund der Formeln (I) eine *geordnete* im Sinne von Nr. 1 der Einleitung: jedem ihrer Individuen kommt ein *eindeutig bestimmter Platz* innerhalb der Gesamtheit zu, aber (wie dies ja schon bei den rationalen Brüchen sich zeigte) *unbegrenzt vielen* der betreffenden Zahlzeichen *derselbe* Platz. Mit anderen Worten: jede konvergente Zahlenfolge stellt *eine einzige Zahl* dar, aber jede Zahl wird *durch unbegrenzt viele verschiedene Zahlenfolgen* dargestellt. Denn, bezeichnet man mit d_ν $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ die Glieder irgendeiner *nullkonvergenten* Folge (deren es ja unbegrenzt viele gibt), so hat man auf Grund der definierenden Formel (Ia) stets:

$$[c_\nu + d_\nu] = [c_\nu].$$

Da jeder *nicht-periodische* unbegrenzt fortsetzbare Systembruch σ_ν eine konvergente Zahlenfolge $[\sigma_\nu]$ liefert, also nunmehr eine bestimmte positive reelle Zahl darstellt, da andererseits nach dem Ergebnis von § 20, Nr. 1 (S. 117) ein solcher Systembruch niemals dieselbe Zahl darstellen kann, wie ein periodischer, also sicher *keine rationale* Zahl, so folgt, daß die Menge der *reellen* Zahlen unbegrenzt viele *neue* Individuen enthält, die wir als *irrationale* Zahlen bezeichnen. Wenn hiernach jeder unbegrenzt fortsetzbare *nicht-periodische* Systembruch eine *Irrationalzahl* darstellt, so wird dieses Resultat im nächsten Paragraphen noch durch den Nachweis vervollständigt werden, daß auch *umgekehrt* jede Irrationalzahl durch einen solchen Systembruch (mit beliebig vorgeschriebener Basis) darstellbar ist.

3. Ein Blick auf die definierenden Formeln (I) zeigt unmittelbar, daß gerade so, wie die *Konvergenz* der *Folge* $[c_\nu]$ durch *Weglassung* oder *Abänderung* einer *begrenzten* Anzahl von Gliedern nicht beeinflußt wird, auch die *Zahl* $[c_\nu]$ hiedurch keine Änderung erleidet.

Aber auch die *Weglassung* einer *unbegrenzten* Anzahl von Gliedern oder eine beliebige *Umordnung* derselben übt gerade so wenig wie auf die *Konvergenz* der Folge auf die durch sie dargestellte reelle *Zahl* irgendwelchen Einfluß. Es gilt also (mit Beibehaltung der beim Beweise des

entsprechenden Konvergenzsatzes, § 22, Nr. 5 (S. 219), benützten Bezeichnungen) der folgende Satz:

Bezeichnet man mit c_ν' $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ *die Glieder einer aus der Folge der* c_ν $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ *durch bloße Umordnung hervorgehenden Folge; mit* c_{m_ν} $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ *diejenigen einer aus der Folge der* c_ν *herausgehobenen Folge, so ist:*

(2) $$[c_\nu'] = [c_\nu], \quad [c_{m_\nu}] = [c_\nu].$$

Beweis. Man hat für beliebiges m und ν identisch:

$$c_\nu' - c_\nu = (c_\nu' - c_m) - (c_\nu - c_m),$$

also:

$$|c_\nu' - c_\nu| \leqq |c_\nu' - c_m| + |c_\nu - c_m|.$$

Man kann alsdann zu beliebig vorgeschriebenem rationalem $\varepsilon > 0$ zunächst m so fixieren, daß:

$$|c_\nu - c_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad \nu \geqq m,$$

sodann $n > m$ so auswählen, daß die Folge der c_ν' für $\nu \geqq n$ nur noch solche c_ν enthält, deren Index $\geqq m$ ist, und man findet daher:

$$|c_\nu' - c_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad \nu \geqq n > m.$$

Da die erste der vorstehenden zwei Ungleichungen *a fortiori* für $\nu \geqq n$ besteht, so ergibt sich:

$$|c_\nu' - c_\nu| < \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu \geqq n,$$

sodaß also die Folge $[c_\nu' - c_\nu]$ eine *null-konvergente* und daher, wie behauptet,

$$[c_\nu'] = [c_\nu]$$

ist.

Um den zweiten Teil des ausgesprochenen Satzes zu beweisen, hat man nur zu beachten, daß zum mindesten von einer bestimmten Stelle ab stets $m_\nu > \nu$ ist, somit $|c_{m_\nu} - c_\nu|$ durch Wahl einer passenden unteren Schranke n für ν beliebig klein wird und daher:

$$[c_{m_\nu} - c_\nu] = 0, \quad [c_{m_\nu}] = [c_\nu]$$

sich ergibt.

4. Mit Rücksicht auf eine weiter unten zu machende Anwendung verdient bemerkt zu werden, daß der zweite Teil des vorstehenden Satzes die folgende Art der Umkehrung gestattet:

Sind $[c_\nu']$, $[c_\nu'']$ zwei konvergente Folgen von der Beschaffenheit, daß:

$$[c_\nu'] = [c_\nu''],$$

so konvergiert auch jede aus den Zahlen c_ν', c_ν'' zusammengesetzte Folge, und man hat, wenn deren Glieder mit c_ν bezeichnet werden:

(3) $$[c_\nu] = [c_\nu'] \quad (= [c_\nu'']).$$

Beweis. Da die schließliche Anordnung der zusammengesetzten Folge auf das Resultat keinerlei Einfluß übt, so genügt es, diejenige Art der Zusammensetzung in Betracht zu ziehen, bei welcher auf jedes einzelne Glied c_ν immer das entsprechende c_ν' folgt. Die Glieder der zusammengesetzten Folge:

$$c_0, c_1, c_2, c_3, \cdots, c_{2\mu}, c_{2\mu+1}, \cdots$$

lauten daher folgendermaßen:

$$c_0', c_0'', c_1', c_1'', \cdots, c_\mu', c_\mu'', \cdots,$$

und man findet:

$$c_{2\mu}' - c_{2\mu} = c_{2\mu}' - c_\mu',$$

$$c_{2\mu+1}' - c_{2\mu+1} = c_{2\mu+1}' - c_\mu'' = (c_{2\mu+1}' - c_\mu') + (c_\mu' - c_\mu'').$$

Da $|c_{2\mu}' - c_\mu'|$, $|c_{2\mu+1}' - c_\mu'|$ wegen der Konvergenz der Folge $[c_\nu']$, $|c_\mu' - c_\mu''|$ wegen $[c_\nu'] = [c_\nu'']$ durch passende Wahl einer unteren Schranke für μ beliebig klein werden, so gilt das gleiche für $|c_{2\mu}' - c_{2\mu}|$, $|c_{2\mu+1}' - c_{2\mu+1}|$, so daß in der Tat:

$$[c_\nu] = [c_\nu']$$

sich ergibt.

5. Zur *Definition* der *Addition* und *Multiplikation* zweier beliebiger reeller Zahlen $[a_\nu]$, $[b_\nu]$ dienen auf Grund der bereits in Nr. 1 (S. 134) angekündigten Methode die nach § 19, Nr. 4 (S. 116) für den Fall *rational-konvergenter* Zahlenfolgen zu Recht bestehenden Formeln (II) und (III), also:

(II) $$[a_\nu] + [b_\nu] = [a_\nu + b_\nu],$$

(III) $$[a_\nu] \cdot [b_\nu] = [a_\nu b_\nu],$$

deren rechte Seiten bestimmte Zahlen vorstellen, da ja die *Konvergenz* der rechts auftretenden Zahlenfolgen in § 22, Nr. 7 (S. 131) bereits erwiesen wurde. Diese Formeln umfassen auch wieder die besonderen Fälle

$[a_\nu] = a$ bzw. $[b_\nu] = b$ (d. h. rational), sofern man a bzw. b durch $[a]$ bzw. $[b]$ ersetzt.[1])

Es ist dann vor allem festzustellen, daß die Formeln (II) und (III) auch wirklich *eindeutige* Resultate liefern, d. h. solche, die lediglich von den *Zahlen* $[a_\nu]$, $[b_\nu]$, nicht aber von der besonderen Wahl der zu ihrer Darstellung dienlichen *Zahlenfolgen* abhängen, daß also:

(IIa) $$[a_\nu' + b_\nu'] = [a_\nu + b_\nu],$$

(IIIa) $$[a_\nu' b_\nu'] = [a_\nu b_\nu],$$

wenn:

$$[a_\nu'] = [a_\nu], \quad [b_\nu'] = [b_\nu]$$

(d. h. $[a_\nu' - a_\nu] = 0$, $[b_\nu' - b_\nu] = 0$).

Die Richtigkeit von (IIa) ist unmittelbar ersichtlich, da ja:

$$[(a_\nu' + b_\nu') - (a_\nu + b_\nu)] = [(a_\nu' - a_\nu) + (b_\nu' - b_\nu)] = 0$$

(vgl. § 19, Nr. 3, S. 115). Zum Beweise von (IIIa) hat man zunächst:

$$[a_\nu' b_\nu] = [a_\nu b_\nu]$$

wegen:

$$[(a_\nu' - a_\nu) b_\nu] = 0$$

(vgl. § 19, S. 115, Fußnote 2). Da sodann analog:

$$[a_\nu' b_\nu'] = [a_\nu' b_\nu],$$

so findet man schließlich, wie behauptet:

$$[a_\nu' b_\nu'] = [a_\nu b_\nu].$$

Auch erkennt man unmittelbar aus der Beschaffenheit der rechten Seiten, daß die durch die Formeln (II), (III) definierten Operationen den ursprünglich für natürliche Zahlen abgeleiteten Grundgesetzen der Addition und Multiplikation genügen, nämlich:

$$[a_\nu] + [b_\nu] = [b_\nu] + [a_\nu], \quad [a_\nu] + [b_\nu + c_\nu] = [a_\nu + b_\nu] + [c_\nu]$$

und:

$$[a_\nu] \cdot [b_\nu] = [b_\nu] \cdot [a_\nu], \quad [a_\nu] \cdot [b_\nu + c_\nu] = [a_\nu] \cdot [b_\nu] + [a_\nu] \cdot [c_\nu],$$

$$[a_\nu b_\nu] \cdot [c_\nu] = [a_\nu] \cdot [b_\nu c_\nu].$$

Daraus folgt dann weiter, daß für die Multiplikation von Summen beliebig vieler *reeller* Zahlen mit anderen reellen Zahlen oder auch wiederum mit Summen reeller Zahlen dieselben Regeln gelten, wie für *rationale* Zahlen.

---

1) D. h. man hat:

$$a + [b_\nu] = [a + b_\nu],$$
$$a \cdot [b_\nu] = [a b_\nu] \text{ usf.}$$

Aus (II) und (III) ergibt sich mit Benützung von (IIa), (IIIa) noch ohne weiteres, daß:

(4) $[a_\nu'] + [b_\nu] = [a_\nu] + [b_\nu]$, $[a_\nu'] \cdot [b_\nu] = [a_\nu] \cdot [b_\nu]$, wenn: $[a_\nu'] = [a_\nu]$.

Es gilt aber auch wiederum das *Umgekehrte*, sofern man bei der Multiplikationsformel noch die Bedingung hinzufügt, daß $[b_\nu]$ *von Null verschieden* sein soll (zum Beweise dient dann die letzte Bemerkung in Fußnote 2, S. 115).

Schließlich findet man auch ohne Schwierigkeit, daß aus der Voraussetzung:

$$[a_\nu'] > [a_\nu] \quad \text{bzw.} \quad [a_\nu'] > 0$$

allemal folgt:

$$[a_\nu'] + [b_\nu] > [a_\nu] + [b_\nu] \quad \text{bzw.} \quad [a_\nu'] + [b_\nu] > [b_\nu];$$

daß ferner aus:

$$[a_\nu'] > [a_\nu], \quad [b_\nu] > 0$$

sich ergibt:

$$[a_\nu'] \cdot [b_\nu] > [a_\nu] \cdot [b_\nu] \quad \text{usf.}$$

6. Wie in § 22, Nr. 7 (S. 131) gezeigt wurde, ist mit den Zahlenfolgen $[a_\nu]$, $[b_\nu]$ auch die Folge $[a_\nu - b_\nu]$ eine *konvergente*, ebenso die Folge $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]$, wenn die Folge der b_ν keine null-konvergente und jedes einzelne b_ν von Null verschieden ist. Wenn es sich lediglich um die *Zahl* (nicht um die gesamte *Zahlenfolge*) $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]$ handelt, kann man von der *letzteren* Nebenbedingung absehen, wenn man berücksichtigt, daß Glieder von der Form $b_\nu = 0$ nur in begrenzter Anzahl vorkommen können, sofern nur die Folge der b_ν keine null-konvergente ist, und daher durch Weglassung einer gewissen Anzahl von Anfangsgliedern beseitigt werden können. Wir wollen dann festsetzen, daß in diesem Falle unter $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]$ diejenige Folge bzw. Zahl verstanden werden soll, welche nach Weglassung einer passenden Anzahl von Anfangsgliedern als wohldefinierte übrig bleibt.

Auf Grund der Definitionsformeln (II) und (III) hat man sodann:

$$[a_\nu - b_\nu] + [b_\nu] = [a_\nu],$$

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right] \cdot [b_\nu] = [a_\nu],$$

woraus sich unmittelbar die folgenden Formeln zur Definition der *Differenz* und des *Quotienten* zweier beliebiger reeller Zahlen ergeben:

(IV) $$[a_\nu] - [b_\nu] = [a_\nu - b_\nu],$$

(V) $$\frac{[a_\nu]}{[b_\nu]} = \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right] \quad ([b_\nu] \lessgtr 0).$$

Dabei folgt unmittelbar aus der Umkehrung der Gleichung (4), daß es neben $[a_\nu - b_\nu]$ bzw. $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]$ keine weitere Zahl $[x_\nu]$ geben kann, welche der Gleichung:

$$[x_\nu] + [b_\nu] = [a_\nu], \quad \text{bzw.} \quad [x_\nu] \cdot [b_\nu] = [a_\nu]$$

genügt.

Für den Fall, daß an die Stelle von $[a_\nu]$ oder $[b_\nu]$ eine Rationalzahl in der gewöhnlichen Form tritt, gilt dann wieder die in ähnlichem Zusammenhange schon mehrfach gemachte Bemerkung.[1])

Durch wiederholte Anwendung der Definitionsgleichungen (II)—(V) lassen sich die betreffenden Rechnungsoperationen auch auf eine beliebige Anzahl reeller Zahlen übertragen. Insbesondere ergibt sich durch $(m-1)$-malige Anwendung der Multiplikationsregel (III) auf die Zahl $[a_\nu]$ zur *Definition* der *Potenz mit positivem ganzzahligen Exponenten* m die Beziehung:

(5) $$[a_\nu]^m = [a_\nu^m].$$

Ist $[a_\nu]$ von Null verschieden, so ergibt sich weiter:

$$[a_\nu]^{-m} = \frac{1}{[a_\nu]^m} = \frac{1}{[a_\nu^m]} = \left[\frac{1}{a_\nu^m}\right],$$

also schließlich:

(6) $$[a_\nu]^{-m} = [a_\nu^{-m}].$$

Ferner:

(7) $$[a_\nu]^{\pm m} \cdot [a_\nu]^{\pm n} = [a_\nu^{\pm m}] \cdot [a_\nu^{\pm n}] = [a_\nu^{\pm m \pm n}] = [a_\nu]^{\pm m \pm n}.$$

In analoger Weise:

(8) $$([a_\nu]^m)^n = [a_\nu]^{mn}, \quad [a_\nu]^m \cdot [b_\nu]^m = ([a_\nu] \cdot [b_\nu])^m,$$

d. h. für das Rechnen mit Potenzen beliebiger reeller Zahlen gelten dieselben Regeln, wie für die Potenzen rationaler Zahlen. Insbesondere findet man noch:

$$\begin{aligned}([a_\nu] + [b_\nu])^m &= [a_\nu + b_\nu]^m \\ &= [(a_\nu + b_\nu)^m] \\ &= [a_\nu^m + (m)_1 a_\nu^{m-1} b_\nu + (m)_2 a_\nu^{m-2} b_\nu^2 + \cdots + b_\nu^m] \\ \text{(9)} \qquad &= [a_\nu]^m + (m)_1 \cdot [a_\nu]^{m-1} \cdot [b_\nu] + (m)_2 \cdot [a_\nu]^{m-2} \cdot [b_\nu]^2 + \cdots + [b_\nu]^m,\end{aligned}$$

d. h. der *binomische Satz* (§ 14, Nr. 5, S. 91) gilt auch für beliebige reelle Zahlen.

Bedeutet schließlich $R([a_\nu], [b_\nu], \cdots, [k_\nu])$ irgendeinen aus den reellen Zahlen $[a_\nu], [b_\nu], \cdots, [k_\nu]$ und eventuell noch irgendwelchen rationalen

---

1) D. h. man hat:

$$a - [b_\nu] = [a - b_\nu]$$

$$\frac{a}{[b_\nu]} = \left[\frac{a}{b_\nu}\right] \quad \text{usf.}$$

Zahlen zusammengesetzten, *begrenzten rationalen Ausdruck* (vgl. § 22, Nr. 8, S. 134), so erscheint derselbe, vorausgesetzt, daß keiner der etwa vorhandenen Nenner *Null* ist oder einer *null-konvergenten* Folge angehört, auf Grund der Formeln (II)—(V) durch die Beziehung bestimmt:

(10) $$R([a_\nu], [b_\nu], \cdots, [k_\nu]) = [R(a_\nu, b_\nu, \cdots, k_\nu)],$$

welche dann umgekehrt die vorangehenden Rechnungsregeln als spezielle Fälle umfaßt. Dabei stellt wiederum die rechte Seite dieser Formel eine bestimmte, von der besonderen Wahl der zur Definition der Zahlen $[a_\nu]$, $[b_\nu]$, $\cdots$, $[k_\nu]$ benützten Zahlenfolgen unabhängige reelle Zahl vor, d. h. es gilt der Satz:

Ist:

(11) $$[a_\nu'] = [a_\nu''], \quad [b_\nu'] = [b_\nu''], \quad \cdots, \quad [k_\nu'] = [k_\nu''],$$

so besteht auch die Beziehung:

(12) $$[R(a_\nu', b_\nu', \cdots, k_\nu')] = [R(a_\nu'', b_\nu'', \cdots, k_\nu'')].$$

Obschon die Richtigkeit dieses Satzes durch wiederholte Anwendung und Zusammenfassung der bisherigen Einzelergebnisse unmittelbar erkannt wird, so wollen wir denselben nochmals in seiner ganzen Allgemeinheit direkt beweisen, um bei dieser Gelegenheit eine Beweismethode einzuführen, die sich auch späterhin noch als nützlich erweisen wird.

Bezeichnet man mit $[a_\nu]$, $[b_\nu]$, $\cdots$, $[k_\nu]$ Zahlenfolgen, die aus den Gliedern (a_ν', a_ν''), (b_ν', b_ν''), $\cdots$, (k_ν', k_ν'') *zusammengesetzt* sind, so sind dieselben nach Nr. 4 dieses Paragraphen *konvergent*, das gleiche gilt dann auch von der Folge $[R(a_\nu, b_\nu, \cdots, k_\nu)]$ (nach § 22, Nr. 8, S. 134), sodaß diese letztere *eine bestimmte reelle Zahl* vorstellt. Zerlegt man sodann diese Zahlenfolge in die beiden Teilfolgen $[R(a_\nu', b_\nu', \cdots, k_\nu')]$ und $[R(a_\nu'', b_\nu'', \cdots, k_\nu'')]$, so stellen auch sie bestimmte reelle Zahlen vor und man hat nach Nr. 3 dieses Paragraphen:

$$\left.\begin{array}{l}[R(a_\nu', b_\nu', \cdots, k_\nu')] \\ [R(a_\nu'', b_\nu'', \cdots, k_\nu'')]\end{array}\right\} = [R(a_\nu, b_\nu, \cdots, k_\nu)],$$

womit die Richtigkeit der Behauptung (12) erwiesen ist. —

Sind insbesondere $[a_\nu]$, $[b_\nu]$, $\cdots$, $[k_\nu]$ *rationale* Zahlen, etwa:

$$[a_\nu] = a, \quad [b_\nu] = b, \quad \cdots, \quad [k_\nu] = k,$$

so folgt zunächst aus (12):

$$[R(a_\nu, b_\nu, \cdots, k_\nu)] = [R(a, b, \cdots, k)],$$

d. h. man findet schließlich:

(13) $$[R(a_\nu, b_\nu, \cdots, k_\nu)] = R(a, b, \cdots, k).$$

7. Bedeutet $[a_\nu]$ eine *positive* Zahl, mit anderen Worten, liegen die einzelnen a_ν zum mindesten von einer bestimmten Stelle ab oberhalb einer gewissen positiven Zahl, so ist offenbar $[-a_\nu]$ eine *negative* Zahl, und zwar findet man auf Grund der Additionsformel (II):

$$[a_\nu] + [-a_\nu] = [a_\nu - a_\nu] = 0.$$

Daraus folgt, daß:

$$[-a_\nu] = 0 - [a_\nu],$$

wofür wir wiederum kürzer schreiben:

(14) $$[-a_\nu] = -[a_\nu].$$

Die Zahlen $[a_\nu]$ und $-[a_\nu]$ heißen dann wieder *entgegengesetzt* und die *positive* Zahl $[a_\nu]$ ihr gemeinsamer *absoluter Betrag.* Da aber wegen $[a_\nu] > 0$ zum mindesten von einer bestimmten Stelle ab durchweg $a_\nu > 0$, also $a_\nu = |a_\nu|$ sein muß, so ergibt sich:

(15) $$|\pm [a_\nu]| = [|a_\nu|] = [|-a_\nu|].$$

Bedeutet jetzt $[c_\nu]$ eine beliebige *positive oder negative* Zahl, so findet man also für den *absoluten Betrag* von $[c_\nu]$ die Beziehung:

(16) $$|[c_\nu]| = [|c_\nu|].$$

§ 24. Die Irrationalzahlen. — Ihre Darstellbarkeit durch unbegrenzt fortsetzbare Systembrüche.

1. Bedeuten a, a' irgendzwei *rationale* Zahlen, $[c_\nu]$ eine reelle Zahl beliebigen Vorzeichens und hat man beständig:

(1) $$a \leqq c_\nu \leqq a', \quad \text{etwa für } \nu \geqq n,$$

so ist auch:

(1a) $$a \leqq [c_\nu] \leqq a'.$$

Denn aus (1) folgt, daß die Zahlenfolgen $[c_\nu - a]$, $[a' - c_\nu]$ für $\nu \geqq n$ nur noch Glieder enthalten, die $\geqq 0$ sind.

Aber auch im Falle:

(2) $$a < c_\nu < a' \quad \text{für } \nu \geqq n \text{ (mit Ausschluß der Gleichheit)}$$

kann zunächst immer nur geschlossen werden, daß wiederum:

(2a) $$a \leqq [c_\nu] \leqq a' \quad \text{(mit Einschluß der Gleichheit).}$$ [1]

1) Dagegen folgt *umgekehrt* aus:

$$a < [c_\nu] < a'$$

stets:

$$a < c_\nu < a'$$

zum mindesten von einer bestimmten Stelle $\nu \geqq n$ ab. Denn die *zweite* dieser Beziehungen bildet ja nach der Grundformel ($\mathrm{I^{bis}}$) von Nr. 2 des vorigen Paragraphen (S. 136) geradezu die *Definition* für den Inhalt der *ersten*.

Denn obschon jetzt die Zahlenfolgen $[c_\nu - a]$, $[a' - c_\nu]$ für $\nu \geqq n$ durchweg aus wesentlich *positiven* (von 0 verschiedenen) Gliedern bestehen, so könnte doch die eine der beiden Folgen eine *null-konvergente* sein, in welchem Falle dann $[c_\nu] = a$ bzw. $[c_\nu] = a'$ wäre.

Steht jedoch von vornherein fest, daß $[c_\nu]$ eine *Irrationalzahl* vorstellt (was z. B. der Fall ist, wenn c_ν den ν-stelligen Anfangsabschnitt eines unbegrenzt fortsetzbaren nicht-periodischen Systembruchs bedeutet), so ist die Möglichkeit der *Gleichheit* mit einer rationalen Zahl definitiv *ausgeschlossen*, sodaß also in diesem Falle aus der Voraussetzung (2) mit Sicherheit geschlossen werden kann, daß:

(2b) $$a < [c_\nu] < a' \quad \textit{(mit Ausschluß der Gleichheit).}$$

Bedeuten ferner $[a_\nu]$, $[a_\nu']$ zwei *beliebige reelle* Zahlen und hat man für $\mu \geqq m$:

(3) $$a_\mu < [c_\nu] < a_\mu',$$

so läßt sich zeigen, daß:

(3a) $$[a_\nu] \leqq [c_\nu] \leqq [a_\nu'].$$

Denn die Voraussetzung $a_\mu < [c_\nu]$ für $\mu \geqq m$, also:

$$a_m < [c_\nu], \quad a_{m+1} < [c_\nu], \quad a_{m+2} < [c_\nu], \quad \cdots,$$

besagt, daß jede der Zahlenfolgen:

$$[a_m - c_\nu], \quad [a_{m+1} - c_\nu], \quad [a_{m+2} - c_\nu], \quad \cdots$$

eine *negative* Zahl liefert. Infolgedessen hat man zunächst:

$$\begin{array}{lll} a_m \quad - c_\nu < 0 & \text{etwa für} & \nu \geqq n, \\ a_{m+1} - c_\nu < 0 & \quad ,, \quad ,, & \nu \geqq n', \\ a_{m+2} - c_\nu < 0 & \quad ,, \quad ,, & \nu \geqq n'' \end{array}$$

usf. *in infinitum*, kann daher eine unbegrenzte Folge *wachsender* natürlicher Zahlen:

$$n_0 \geqq n, \quad n_1 \geqq n', \quad n_2 \geqq n'', \quad \cdots$$

so auswählen, daß:

$$a_m - c_{n_0} < 0, \quad a_{m+1} - c_{n_1} < 0, \quad a_{m+2} - c_{n_2} < 0, \quad \cdots,$$

also:

$$[a_{m+\nu} - c_{n_\nu}] \leqq 0$$

und daher, wenn man noch berücksichtigt, daß $[a_{m+\nu}] = [a_\nu]$, $[c_{n_\nu}] = [c_\nu]$, schließlich:

$$[a_\nu] \leqq [c_\nu].$$

In analoger Weise ergibt sich:

$$[a_\nu'] \geqq [c_\nu].$$

2. Ist c_ν das allgemeine Glied einer konvergenten Zahlenfolge, ε ein beliebig klein zu denkender echter Bruch, so läßt sich nach § 22, Nr. 4, Ungl. (1) (S. 128) n so fixieren, daß:

$$(4) \qquad c_n - \varepsilon < c_\nu < c_n + \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu \geqq n.$$

Daraus folgt zunächst mit Benützung der Ungleichungen (2) und (2a), daß:

$$(4a) \qquad c_n - \varepsilon \leqq [c_\nu] \leqq c_n + \varepsilon$$

und, falls $[c_\nu]$ eine Irrationalzahl ist, nach Ungl. (2b):

$$(4b) \qquad c_n - \varepsilon < [c_\nu] < c_n + \varepsilon.$$

Wegen der Willkürlichkeit von ε ergibt sich also:

Jede irrationale Zahl läßt sich zwischen unbegrenzt viele Paare von rationalen Zahlen einschließen, darunter auch solche, deren Differenz eine beliebig klein vorgeschriebene Zahl nicht übersteigt.

Hieraus folgt insbesondere, daß sich jede Irrationalzahl zwischen zwei aufeinander folgende *ganze* Zahlen (*Null* inklusive) einschließen läßt, wie zwar für *jede nicht-ganze* Zahl ohne weiteres aus der Anordnung des Systems der reellen Zahlen hervorgeht, jedoch mit Benützung der zur Definition der Irrationalzahl dienenden Zahlenfolge $[c_\nu]$ und der Ungl. (4b) noch in folgender Weise präzisiert werden kann. Nimmt man in Ungl. (4b) $\varepsilon < \frac{1}{2}$, also $c_n + \varepsilon - (c_n - \varepsilon) = 2\varepsilon < 1$, so liegt *zwischen* $c_n - \varepsilon$ und $c_n + \varepsilon$ entweder *keine* oder höchstens *eine* ganze Zahl. Bedeutet dann g *die größte ganze Zahl*, welche $\leqq c_n - \varepsilon$ ist, so hat man im *ersten* der genannten Fälle:

$$g \leqq c_n - \varepsilon < [c_\nu] < c_n + \varepsilon \leqq g + 1$$

und daher:

$$(5) \qquad g < [c_\nu] < g + 1;$$

im *zweiten* Falle:

$$g \leqq c_n - \varepsilon < [c_\nu] < c_n + \varepsilon \leqq g + 2,$$

also:

$$(6) \qquad \text{entweder:} \quad g < [c_\nu] < g + 1, \quad \text{oder:} \quad g + 1 < [c_\nu] < g + 2.$$

3. Mit Hilfe des vorstehenden Ergebnisses können wir jetzt den folgenden, schon früher (§ 23, Nr. 2, S. 136) angekündigten wichtigen Satz beweisen:

Jede Irrationalzahl $[c_\nu]$ läßt sich durch einen und nur einen unbegrenzten, niemals periodischen Systembruch mit vorgeschriebener Basis b darstellen.

Beweis. Es werde zunächst $[c_\nu]$ als *positiv* angenommen. Für jede beliebige natürliche Zahl k ist $[b^k c_\nu]$ gleichzeitig mit $[c_\nu]$ eine *positive*

Irrationalzahl. Denn man hat: $[b^k c_\nu] = b^k \cdot [c_\nu] > 0$. Und, wäre $[b^k c_\nu]$ eine *rationale* Zahl a, so hätte man:

$$[b^k c_\nu] = b^k \cdot [c_\nu] = a, \quad \text{also:} \quad [c_\nu] = \frac{a}{b^k},$$

d. h. auch $[c_\nu]$ müßte rational sein.

Hiernach muß eine Zahl g_k existieren, die entweder *positiv* und *ganz* oder *Null* ist und der Bedingung genügt:

(7) $$g_k < [b^k c_\nu] < g_k + 1 \quad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$ [1]

Analog ergibt sich, wenn man k durch $k+1$ ersetzt, eine Beziehung von der Form:

(8) $$g_{k+1} < [b^{k+1} c_\nu] < g_{k+1} + 1.$$

Andererseits findet man durch Multiplikation der vorhergehenden Ungleichung mit dem Faktor b:

(9) $$b g_k < [b^{k+1} c_\nu] < b g_k + b.$$

Da aber g_{k+1} und $g_{k+1} + 1$ die beiden unterhalb und oberhalb $[b^{k+1} c_\nu]$ *nächstgelegenen* ganzen Zahlen (wobei g_{k+1} eventuell auch die *Null* vorstellen kann), so zeigt die Vergleichung von (8) und (9), daß:

$$b g_k \leqq g_{k+1}, \quad g_{k+1} + 1 \leqq b g_k + b,$$

also:

$$b g_k \leqq g_{k+1} \leqq b g_k + (b-1).$$

Hiernach läßt sich g_{k+1} in die Form setzen:

(10) $$g_{k+1} = b g_k + a_{k+1}, \quad \text{wo:} \quad 0 \leqq a_{k+1} \leqq b - 1,$$

und man findet daher durch Division mit b^{k+1}:

(11) $$\frac{g_{k+1}}{b^{k+1}} = \frac{g_k}{b^k} + \frac{a_{k+1}}{b^{k+1}}.$$

---

1) Man beachte, daß zur Bestimmung der Zahl g_k nicht die fragliche *Irrationalzahl* selbst, sondern, wie die Betrachtungen der vorigen Nummer des näheren zeigen, lediglich ein passend auszuwählendes Glied der definierenden *rationalen* Zahlenfolge gebraucht wird, womit freilich keineswegs gesagt sein soll, daß eine solche Auswahl allemal mit Hilfe einer endlichen Anzahl irgendwelcher Operationen bewerkstelligt werden kann. Besitzt aber die Zahlenfolge vermöge ihres Bildungsgesetzes die hierzu erforderlichen Eigenschaften, so liefert der im Text gegebene Beweis für die Darstellbarkeit von $[c_\nu]$ durch einen unbegrenzt fortsetzbaren Systembruch zugleich ein bestimmtes rationales Rechnungsverfahren, um jenen Systembruch bis zu einer beliebig vorgeschriebenen Stelle wirklich *herzustellen.* Will man nur seine *Existenz* beweisen, so kann man etwas kürzer folgendermaßen schließen. Nach Nr. 2 gibt es zunächst eine natürliche Zahl $g_0 + 1$, derart, daß: $g_0 < [c_\nu] < g_0 + 1$. Bildet man sodann:

$$g_0, \quad g_0 + \frac{1}{b}, \quad \cdots, \quad g_0 + \frac{b-1}{b}, \quad g_0 + 1,$$

so muß $[c_\nu]$ zwischen zwei Zahlen dieser Gruppe liegen, etwa:

$$g_0 + \frac{a_1}{b} < [c_\nu] < g_0 + \frac{a_1 + 1}{b} \quad (\text{wo: } 0 \leqq a_1 \leqq b - 1) \text{ usf.}$$

Setzt man hier der Reihe nach $k = 0, 1, \cdots, (\mu - 1)$, wo μ eine beliebig groß zu denkende natürliche Zahl bedeutet, so folgt durch Addition der resultierenden Gleichungen und Weglassung der alsdann auf beiden Seiten auftretenden Summe $\frac{g_1}{b} + \frac{g_2}{b^2} + \cdots + \frac{g_{\mu-1}}{b^{\mu-1}}$:

$$(12) \qquad \frac{g_\mu}{b^\mu} = g_0 + \frac{a_1}{b} + \cdots + \frac{a_\mu}{b^\mu} = \sigma_\mu,$$

wo also σ_μ einen nach bestimmter Vorschrift unbegrenzt fortsetzbaren Systembruch bedeutet.

Andererseits findet man aus Ungl. (7) durch Division mit b^k, wenn man schließlich noch μ statt k schreibt:

$$(13) \qquad \frac{g_\mu}{b^\mu} < [c_\nu] < \frac{g_\mu + 1}{b^\mu},$$

so daß sich durch Einsetzen der Beziehung (12) ergibt:

$$(14) \qquad \sigma_\mu < [c_\nu] < \sigma_\mu + \frac{1}{b^\mu} \quad (\mu = 0, 1, 2, \cdots).$$

Übrigens kann man sich leicht noch ausdrücklich überzeugen, daß jener Systembruch auch wirklich stets unbegrenzt viele *von Null verschiedene* Zähler a_μ enthalten muß. Denn hätte man von einem bestimmten $\mu = m$ anfangend beständig $a_{\mu+1} = 0$ und somit:

$$\sigma_m = \sigma_{m+1} = \cdots = \sigma_{m+\varrho} = \cdots,$$

so würde sich aus Ungl. (14) durch Substitution von $\mu = m, m+1, \cdots, m+\varrho, \cdots$ ergeben:

$$\sigma_m < [c_\nu] < \sigma_m + \frac{1}{b^{m+\varrho}},$$

also:

$$0 < [c_\nu - \sigma_m] < \frac{1}{b^{m+\varrho}},$$

was unmöglich ist, da aus dem zweiten Teile dieser Ungleichung geradezu folgen würde: $[c_\nu - \sigma_m] = 0$, was dem ersten Teile widerspricht.[1])

1) Es kann nicht etwa eine *positive Irrationalzahl* $[c_\nu]$ geben, die *kleiner* ist, als *jede positive rationale* Zahl ε. Denn aus:

$$0 < [c_\nu] < \varepsilon$$

würde folgen (vgl. Fußnote 1 zu Nr. 1, S. 143):

$$0 < c_\nu < \varepsilon \quad \text{etwa für: } \nu \geqq n.$$

Und da es freistehen soll, ε unbegrenzt zu verkleinern, so hat man auf Grund unserer Definition (§ 23, Nr. 2, S. 135):

$$[c_\nu] = 0.$$

Der Systembruch σ_μ ist also bei unbegrenzt wachsendem μ ein solcher mit unbegrenzt vielen nicht mit Nullen besetzten Stellen. Die konvergente Folge der σ_μ liefert dann eine bestimmte positive Zahl $[\sigma_\mu]$, und zwar ergibt sich aus Ungl. (14) mit Benützung von Ungl. (3), (3a) in Nr. 1 dieses Paragraphen:

(15) $$[\sigma_\nu] \leqq [c_\nu] \leqq \left[\sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu}\right],$$

also, wegen:

$$\left[\sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu}\right] - [\sigma_\nu] = \left[\frac{1}{b^\nu}\right] = 0$$

schließlich:

(16) $$[c_\nu] = [\sigma_\nu].$$

Daß es im übrigen nur *einen* solchen unbegrenzt fortsetzbaren Systembruch σ_ν (sc. mit vorgeschriebener Basis b) geben kann, folgt unmittelbar aus dem § 20, Nr. 1 (S. 118) bewiesenen Hilfssatze, wonach für *jeden* mit σ_ν nicht völlig identischen Systembruch σ_ν' die Folge der Zahlen $|\sigma_\nu - \sigma_\nu'|$ für $\nu \geqq m$ stets *oberhalb* einer festen positiven Zahl bleibt, so daß also die Möglichkeit einer Beziehung von der Form $[\sigma_\nu] = [\sigma_\nu']$ ein für allemal ausgeschlossen erscheint.

Zugleich folgt dann noch ohne weiteres aus unseren früheren Betrachtungen, daß der Systembruch $[\sigma_\nu]$ ein *nicht-periodischer* sein muß.

Ist $[c_\nu']$ eine *negative* Irrationalzahl, also $[-c_\nu']$ eine *positive*, so findet man zunächst: $[-c_\nu'] = [\sigma_\nu']$, also: $[c_\nu'] = [-\sigma_\nu'] = -[\sigma_\nu']$.

4. Das vorstehende Ergebnis lehrt, daß *die Menge aller Irrationalzahlen* identisch ist mit *der Menge aller nicht-periodischen Systembrüche* für irgendeine beliebig gewählte Basis b (z. B. aller möglichen nichtperiodischen unendlichen Dezimal- oder dyadischen Brüche), d. h. daß jede Irrationalzahl durch *einen* solchen Systembruch dargestellt wird und umgekehrt jeder solche Systembruch *eine* Irrationalzahl darstellt. Nachdem früher gezeigt worden, daß eine analoge Beziehung zwischen den *rationalen* Zahlen und den *periodischen* Systembrüchen (einschließlich derjenigen mit der eingliedrigen Periode $b-1$) besteht, so ergibt sich schließlich, daß *jede reelle Zahl* dargestellt werden kann durch einen und nur einen *unbegrenzt fortsetzbaren Systembruch* mit vorgeschriebener Basis und daß umgekehrt *jeder solche Systembruch* eine und nur eine *reelle Zahl* darstellt.

§ 25. Abzählbarkeit der rationalen bzw. algebraischen und Nichtabzählbarkeit der irrationalen bzw. transzendenten Zahlen.

1. Die im vorigen Paragraphen festgestellte Möglichkeit, die Menge der reellen Zahlen mit derjenigen der unbegrenzt fortsetzbaren Systembrüche (irgendeiner bestimmten Basis) zu identifizieren, bietet ein wirk-

sames Hilfsmittel, um über jene Menge der reellen Zahlen einen gewissen Überblick zu gewinnen und insbesondere zu erkennen, daß dieselbe sozusagen *„unvergleichlich“ mehr irrationale* Zahlen enthält, als rationale. Damit diese vorläufige und äußerst unbestimmte Aussage einen festen Sinn bekommt, wird vor allem anzugeben sein, inwiefern von einer wirklichen *Vergleichung unbegrenzter* oder, wie wir von jetzt ab auch sagen wollen, *unendlicher Mengen* die Rede sein kann. Denn da das Merkmal einer bestimmten *Anzahl*, welches bei *endlichen* Mengen ein sicheres Kennzeichen zur Entscheidung über „gleich“, „kleiner“ und „größer“ liefert, hier naturgemäß *fehlt*, so wird es vor allem darauf ankommen, auf Grund einer möglichst zweckmäßig zu wählenden *Definition* einen geeigneten *Ersatz* für jenes fehlende Merkmal der Anzahl zu schaffen. *Ohne* eine solche bis zu einem gewissen Grade *willkürliche Festsetzung* würden sich beständig Zweifel und Widersprüche ergeben, wie die folgenden einfachen Beispiele erläutern mögen.

Wenn etwa A sagt, es gebe *mehr*, ja *unendlich viel mehr* rationale Zahlen, welche die 1 übersteigen, als solche, die zwischen 0 und 1 liegen, so würde „Jedermann“ dem ohne weiteres beistimmen und es kaum für nötig halten, wenn A zur Begründung seiner Aussage noch anführt, es gebe doch schon zwischen 1 und 2 genau so viele rationale Zahlen wie zwischen 0 und 1, ebenso aber auch zwischen 2 und 3, 3 und 4 usf. *in infinitum*. Und wenn jetzt B darauf erwidert, es gäbe trotz alledem nur *ebenso viele* rationale Zahlen oberhalb 1, wie zwischen 0 und 1, da ja *jedem* positiven echten Bruch α stets *eine* und *nur* eine rationale Zahl $\frac{1}{\alpha} > 1$ entspreche und *umgekehrt*, so wird „Jedermann“ das lediglich für ein vermittelst eines mathematischen Kunstgriffes erzeugtes *Paradoxon* halten.

Wenn ferner A sagt, unter den *natürlichen* Zahlen gebe es *ebensoviele gerade* wie *ungerade*, es gebe also nur *halb so viel* positive *gerade* Zahlen wie *natürliche* Zahlen, so wird wiederum „Jedermann“ dies für völlig selbstverständlich halten. Und wenn demgegenüber B erklärt, es gebe *ebenso viele* positive *gerade* Zahlen, wie es *natürliche* Zahlen gibt, denn *jeder natürlichen* Zahl n entspreche eine *gerade* Zahl $2n$ und *umgekehrt*, so wird „Jedermann“ diese Behauptung für einen glatten *Widersinn* erklären, denn die *geraden* Zahlen bilden ja nur einen *Teil* des Systems der *natürlichen* und es könne der Teil niemals gleich dem Ganzen sein.

Im Grunde genommen haben A und B in gleichem Maße Recht bzw. Unrecht. *Unrecht*, weil es überhaupt keinen Sinn hat, bei *unendlichen* Mengen von *ebenso viel*, *mehr* oder *weniger* zu sprechen, so lange diese Begriffe nicht ausdrücklich definiert sind. *Recht*, weil nach Einführung

geeigneter Definitionen sowohl die Aussagen von A, wie die von B einen einwandfreien Inhalt bekommen. Wenn wir uns nun in dem vorliegenden Zusammenhange gänzlich auf den scheinbar paradoxen Standpunkt von B stellen, so geschieht dies, weil tatsächlich nur dieser auf einer logisch konsequenten Weiterbildung des *Anzahl*begriffes[1]) beruht, die (von Georg Cantor herrührend) für den Fortschritt der Zahlen- und Funktionenlehre sich als außerordentlich fruchtbar erwiesen hat.

2. Zwei *endliche* Mengen nannten wir *gleich*, wenn die Elemente der einen sich *umkehrbar eindeutig* denen der anderen zuordnen lassen.[2]) Das allen *gleichen* Mengen gemeinsame Merkmal heißt die *Anzahl* jeder einzelnen Menge. *Gleichen* Mengen kommt also *dieselbe Anzahl (Kardinalzahl)* zu.

Indem wir nun, um falsche Vorstellungen auszuschalten, das Beiwort *gleich* durch das umfassendere *äquivalent* ersetzen, *definieren* wir jetzt:

Zwei beliebige (d. h. endliche oder unendliche) Mengen sollen äquivalent heißen, wenn jedes Element der einen sich umkehrbar eindeutig einem Elemente der anderen zuordnen läßt. Das äquivalenten Mengen gemeinsame Merkmal heißt ihre Mächtigkeit oder Kardinalzahl. Äquivalenten Mengen kommt also dieselbe Mächtigkeit (Kardinalzahl) zu.

Unmittelbar aus dieser Definition folgt:

Zwei Mengen, die einer dritten äquivalent sind, sind auch untereinander äquivalent.

Ferner:

Endliche äquivalente Mengen sind untereinander gleich. Ihre Mächtigkeit ist ihre Anzahl.

Auf Grund der obigen Definition wären also die oben dem Individuum B zugeteilten Aussagen in folgender Weise zu modifizieren:

Die Menge der rationalen Zahlen oberhalb 1 ist *äquivalent* der Menge der rationalen Zahlen zwischen 0 und 1.

Die Menge der positiven geraden Zahlen ist *äquivalent* der Menge der natürlichen Zahlen.

Das letzte Beispiel lehrt, daß eine *unendliche* Menge, im Gegensatz zu dem Verhalten *endlicher* Mengen, sehr wohl einer *Teilmenge* äquivalent sein kann. Es läßt sich sogar zeigen (worauf an dieser Stelle nicht eingegangen werden soll), daß *jede* unendliche Menge Teilmengen enthält,

---

1) Dem gegenüber gewinnen die Aussagen von A einen bestimmten Inhalt, wenn man sie in geeigneter Weise als *Grenzwert*beziehungen deutet: vgl. § 37, S. 237, Fußnote 1.

2) S. § 3, Nr. 3 (S. 19).

denen sie äquivalent ist, und daß man daher diese Eigenschaft geradezu als *Kennzeichen* bzw. als *Definition* für die *Unendlichkeit* einer Menge benützen kann, also: Eine Menge heißt *unendlich*, wenn sie eine Teilmenge von gleicher Mächtigkeit besitzt.

3. Alle Mengen, die mit der Menge der *natürlichen Zahlen* (nach Belieben mit Hinzufügung der *Null*) äquivalent sind, heißen *abzählbar*. Die Elemente einer abzählbaren Menge lassen sich also sukzessive der Reihe der Zahlen

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \nu,\ \cdots$$

zuordnen, anders ausgesprochen, in Form einer fortlaufenden *Folge*

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_\nu,\ \cdots$$

anschreiben.

Hiernach ist also die Menge der *geraden* positiven Zahlen *abzählbar*, wie ja in der Tat jede *Teilmenge* einer abzählbaren Menge (nach unserer früheren Ausdrucksweise: jede aus einer Folge *herausgehobene* Folge) nur *endlich* oder *abzählbar* sein kann.

Aber auch die Menge *aller* ganzen Zahlen, d. h. der positiven und negativen, ist *abzählbar*, wie man ohne weiteres erkennt, wenn man sie in der Form anschreibt:

$$1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \cdots,\ \nu,\ -\nu,\ \cdots,$$

mit anderen Worten, die *positiven* Zahlen den *ungeraden*, die *negativen* den *geraden* Zahlen bzw. Stellen der ursprünglichen Zahlenreihe zuordnet.

Diese Beispiele sind so trivialer Natur, daß sie von der Nützlichkeit und Tragweite des Abzählbarkeitsbegriffes noch nicht die leiseste Ahnung erwecken. Dagegen wollen wir jetzt den folgenden Satz beweisen, der in der Tat als grundlegend für jede tiefere Erkenntnis der Struktur unseres Zahlvorrats anzusehen ist:

Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar.

Beweis. Wir betrachten zunächst die *positiven* rationalen Zahlen, die wir uns, einschließlich der *ganzen* Zahlen, in der Form *reduzierter* Brüche $\frac{p}{q}$ angeschrieben denken (so daß also p, q relativ prim und $q = 1$, falls die betreffende Zahl eine *ganze* ist). Bedeutet dann $\nu + 1$ irgendeine natürliche Zahl, größer als 1, so gibt es *höchstens* ν zu berücksichtigende Zahlen $\frac{p}{q}$, für welche $p + q = \nu + 1$, nämlich die Zahlengruppe:

$$\frac{1}{\nu},\ \frac{2}{\nu-1},\ \cdots,\ \frac{\nu-1}{2},\ \frac{\nu}{1},$$

aus der man alle etwaigen nicht-reduzierten Brüche ausgeschieden hat.

Indem man hier sukzessive $\nu = 1, 2, 3, \cdots$ setzt, ergibt sich für die gesamte Menge der positiven Rationalzahlen die folgende Reihenanordnung[1]):

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \ldots, \frac{1}{\nu}, \ldots, \frac{\lambda}{\nu+1-\lambda}, \ldots, \frac{\nu}{1}, \ldots\ldots,$$

innerhalb deren jede positive rationale Zahl einmal und nur einmal vorkommt, nämlich die Zahl $\frac{p}{q}$ in der $(p+q-1)^{\text{ten}}$ Gliedergruppe und in dieser spätestens an der p^{ten} Stelle.

Will man auch noch die *Null* und die *negativen* rationalen Zahlen in die obige Folge aufnehmen, so hat man derselben nur noch 0 als Anfangsglied hinzuzufügen und kann im übrigen entweder jeder *positiven* Zahl $\frac{p}{q}$ unmittelbar die *negative* Zahl $-\frac{p}{q}$ folgen lassen oder *vor* jede Gliedergruppe die entsprechenden negativen Zahlen in umgekehrter Reihenfolge anschreiben, sodaß also innerhalb jeder Gliedergruppe die Zahlen der *Größe* nach geordnet erscheinen[2]):

$$-\frac{\nu}{1}, \ldots, -\frac{\lambda}{\nu+1-\lambda}, \ldots, -\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}, \ldots, \frac{\lambda}{\nu+1-\lambda}, \ldots, \frac{\nu}{1}.$$

Das soeben bewiesene Resultat liefert die merkwürdige Erkenntnis, daß die Menge der *rationalen* Zahlen *nur dieselbe Mächtigkeit* besitzt, wie die Reihe der *natürlichen* Zahlen, obschon nicht allein zwischen je zwei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen a und $a+1$, sondern auch dann, wenn man dieses Intervall durch Einschaltung von Brüchen in *beliebig kleine* Teilintervalle zerlegt, in jedem solchen Teilintervall *unendlich viele* rationale Zahlen liegen oder, wie man kurz zu sagen pflegt, obschon die Menge der nach der Größe geordneten rationalen Zahlen innerhalb der Gesamtheit der reellen Zahlen *überall dicht* ist.

Im übrigen gestattet das obige Ergebnis sogar noch eine wesentliche Verallgemeinerung, auf die man hingewiesen wird, sobald man die

---

1) Das Prinzip, welches dieser Anordnung zu grunde liegt, gestattet eine wichtige Verallgemeinerung, von welcher jedoch erst bei späterer Gelegenheit die Rede sein soll (s. § 39, Nr. 2, S. 250).

2) Die so erzielte Anordnung läßt sich nach dem Vorgange von G. Cantor in folgender Weise sehr kurz beschreiben: Man bezeichne die positive Zahl $p+q$ als *Höhe* der rationalen Zahlen $\pm\frac{p}{q}$. Sodann ordne man die rationalen Zahlen $\left(\text{inkl. } 0 = \frac{0}{1}\right)$ nach Gliedergruppen von wachsender *Höhe* 1, 2, 3, $\cdots$ und innerhalb jeder Gruppe nach der *Größe*.

Gesamtheit der von Null verschiedenen *rationalen* Zahlen auffaßt als Lösungen aller möglichen Gleichungen von der Form:

$$(1)\quad a_1 x + a_0 = 0, \text{ wo: } \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 1, 2, 3, \cdots \\ a_0 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots \end{array} \right\} a_0, a_1 \text{ relativ prim.}$$

Bei der Abzählung, d. h. bei der Anordnung aller Zahlen x in eine unbegrenzte Folge, bilden dann immer alle diejenigen Zahlen x eine Gliedergruppe, welche durch eine Bedingung von der Form

$$(2)\qquad |a_0| + a_1 = s$$

charakterisiert sind[1]), unter s irgendeine bestimmte natürliche Zahl verstanden, und man erhält die Gesamtheit aller Gliedergruppen, wenn man der Reihe nach $s = 2, 3, 4, \cdots$ setzt. Bezeichnet man zwei Gleichungen von der Form (1) nur dann als *wesentlich verschieden*, wenn sie *verschiedene* Werte x liefern, so daß also in der Tat *alle* in diesem Sinne *verschiedenen* Gleichungen schon zustande kommen, wenn man a_0, a_1 als *relativ prim* und a_1 als wesentlich *positiv* annimmt, so kann man dieses Resultat auch so aussprechen, daß *alle wesentlich verschiedenen Gleichungen* von der Form (1), d. h. alle diejenigen, in denen x nur in der *1ten Potenz* (oder auch: „*linear*") vorkommt, während a_0, a_1 den angegebenen Bedingungen genügen, eine *abzählbare Menge* bilden.

4. Die in Aussicht gestellte Erweiterung besteht nun darin, daß wir statt der obigen sehr speziellen Gleichungsform eine analoge von möglichster Allgemeinheit in Betracht ziehen. Es werde gesetzt:

$$(3)\qquad g_n(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0,$$

wo n eine beliebige natürliche Zahl, $A_0, A_1, \cdots, A_n$ vorläufig irgendwelche als gegeben anzusehende *reelle* Zahlen bedeuten, während x als Zeichen für eine Zahl gelten soll, über die noch beliebig verfügt werden kann. Man bezeichnet einen solchen Ausdruck $g_n(x)$ als eine *ganze Funktion* oder ein *Polynom nten Grades* in x, mit den reellen *Koeffizienten* $A_0, A_1, \cdots, A_n$. Ist sodann x_1 eine bestimmte Zahl, welche in den Ausdruck (3) eingesetzt, diesen zu *Null* macht, ist also:

$$(4)\qquad g_n(x_1) = 0,$$

so heißt x_1 eine *Lösung* oder *Wurzel* der *algebraischen Gleichung nten Grades:*

$$(5)\qquad g_n(x) = 0.$$

Ob bzw. *wann* eine solche Gleichung überhaupt eine solche Lösung besitzt (die in dem vorliegenden Zusammenhange ja nur eine *reelle* Zahl

1) Vgl. die vorige Fußnote.

sein könnte, da andere Zahlen für uns noch nicht existieren), bleibt vorläufig dahingestellt.[1]) Dagegen soll hier, als für die vorliegende Betrachtung wesentlich, gezeigt werden, daß eine Gleichung n^{ten} Grades *keinesfalls mehr* als n *verschiedene* Lösungen haben kann.

Sei also, wie oben angenommen wurde, x_1 eine Lösung der Gleichung $g_n(x) = 0$, so hat man „*identisch*", d. h. unabhängig davon, welchen Wert man der noch willkürlich gebliebenen Zahl x beilegen will:

$$\begin{aligned} g_n(x) &= g_n(x) - g_n(x_1) \\ (6) \qquad &= A_n(x^n - x_1^n) + A_{n-1}(x^{n-1} - x_1^{n-1}) + \cdots + A_2(x^2 - x_1^2) + A_1(x - x_1). \end{aligned}$$

Nun ist für $\nu = 2, 3, \cdots, n$:

$$x^\nu - x_1^\nu = (x - x_1)(x^{\nu-1} + x_1 x^{\nu-2} + x_1^2 x^{\nu-3} + \cdots + x_1^{\nu-2} x + x_1^{\nu-1})$$

und daher:

$$g_n(x) = (x - x_1) \cdot \left\{ \begin{array}{l} A_n x^{n-1} + A_n x_1 x^{n-2} + A_n x_1^2 x^{n-3} + \cdots + A_n x_1^{n-2} x + A_n x_1^{n-1} \\ \qquad + A_{n-1} x^{n-2} + A_{n-1} x_1 x^{n-3} + \cdots + A_{n-1} x_1^{n-3} x + A_{n-1} x_1^{n-2} \\ \qquad\qquad + \cdots \cdots \cdots \\ \qquad\qquad\qquad + A_2 x + A_2 x_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + A_1 \end{array} \right\}$$

kürzer geschrieben:

$$(7) \qquad g_n(x) = (x - x_1) \cdot g_{n-1}(x),$$

wo $g_{n-1}(x)$ eine gewisse ganze Funktion in x vom Grade $(n-1)$ bedeutet, deren Koeffizienten bestimmte, aus x_1 und $A_1, A_2, \cdots, A_n$, wie aus (6) des näheren ersichtlich, zusammengesetzte Zahlen sind.

Bedeutet dann x_2 *irgendeine* von x_1 verschiedene Zahl, so hat man nach Gl. (7):

$$(8) \qquad g_n(x_2) = (x_2 - x_1) \cdot g_{n-1}(x_2).$$

Soll nun die Gleichung $g_n(x) = 0$ noch eine von x_1 *verschiedene* Lösung x_2 haben, also $g_n(x_2) = 0$ sein, so kann dies nach Gl. (8) nur dann der Fall sein, wenn $g_{n-1}(x_2) = 0$, d. h. wenn x_2 eine Lösung der Gleichung $g_{n-1}(x) = 0$ ist. Umgekehrt ist aber auch *jede* Lösung dieser letzteren Gleichung eine solche von $g_n(x) = 0$. Somit hat $g_n(x) = 0$

1) Daß es überhaupt Gleichungen sowohl *mit* (reeller) Lösung, als *ohne* solche gibt, zeigen die einfachen Beispiele:

$$x^n - |a| = 0,$$
$$x^{2m} + |a| = 0.$$

höchstens[1]) die Lösung x_1 vor der Gleichung $g_{n-1}(x) = 0$ *voraus*, und es hat daher eine beliebig gegebene Gleichung n^{ten} Grades höchstens *eine* Lösung *mehr*, als eine gewisse Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades. Da für diese letztere das analoge gegenüber einer gewissen Gleichung $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades gilt, so folgt, daß unsere Gleichung n^{ten} Grades höchstens zwei Lösungen *mehr* hat, als eine gewisse Gleichung $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades, und man findet durch Fortsetzung dieser Schlußweise, daß die Gleichung n^{ten} Grades höchstens $(n-1)$ Lösungen *mehr* haben kann, als eine gewisse Gleichung 1ten Grades, also da diese letztere *eine* und *nur* eine Lösung besitzt, im ganzen höchstens n verschiedene Lösungen.

5. Wir betrachten jetzt insbesondere solche Gleichungen n^{ten} Grades, deren Koeffizienten *ganze* Zahlen (einschließlich der *Null*) sind, etwa:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0. \tag{9}$$

Dabei ist selbstverständlich a_n stets als *von Null verschieden* anzusehen, da andernfalls der Grad der Gleichung niedriger als n wäre. Von den übrigen Koeffizienten können beliebig viele gleich *Null* sein, doch wollen wir ausdrücklich a_0 als *von Null verschieden* annehmen (d. h. wir schließen solche Gleichungen von der Betrachtung aus, welche die Lösung $x = 0$ haben). Da ferner die Lösungen einer Gleichung offenbar keine Änderung erleiden, wenn man die ganze Gleichung, d. h. sämtliche Koeffizienten mit irgendeinem Zahlenfaktor multipliziert, so wollen wir Gleichungen von der Form (9) als *nicht wesentlich verschieden* bezeichnen, wenn sie sich nur um einen ganzzahligen Faktor (insbesondere auch um den Faktor (-1)) unterscheiden, und wir brauchen daher bei der Aufzählung aller möglichen in dem obigen Sinne *verschiedenen* Gleichungen von der Form (9) nur diejenigen zu berücksichtigen, bei denen $a_0, a_1, \cdots, a_n$ keinen (von 1 verschiedenen) gemeinsamen Teiler besitzen und überdies a_n wesentlich *positiv* ist. Alsdann läßt sich zeigen, daß alle *wesentlich verschiedenen* Gleichungen von der Form (9) für jedes einzelne n eine *abzählbare* Menge bilden. Denn bezeichnet man wieder mit s eine natürliche Zahl $\geqq 2$ und setzt:

$$|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| = s, \tag{10}$$

so gibt es offenbar nur eine *endliche* Anzahl von Verbindungen natürlicher, keinen Gemeinteiler besitzenden Zahlen und Nullen, welche der Gleichung (10) und überdies den Beziehungen $|a_0| \geqq 1$, $|a_n| \geqq 1$ genügen,

---

1) Wir sagen „höchstens", da die Gleichung $g_{n-1}(x) = 0$ eventuell ja *auch* die Lösung x_1 haben kann, so daß x_1 keine Lösung für $g_n(x) = 0$ bedeuten würde, die diese Gleichung vor der Gleichung $g_{n-1}(x) = 0$ *voraus* hat.

also auch nur eine *endliche* Anzahl von Gleichungen der Form (9), die dadurch zustande kommen, daß man setzt:

$$a_\nu = \pm |a_\nu| \quad (\nu = 0, 1, \cdots, (n-1)), \quad a_n = |a_n|.$$

Gibt man hierbei s der Reihe nach die Werte 2, 3, 4, $\cdots$, so erhält man auf diese Weise *alle möglichen* „wesentlich verschiedenen" Gleichungen eines bestimmten n^{ten} Grades nach Gruppen geordnet, deren jede durch ein bestimmtes s charakterisiert ist — diese Gleichungen bilden also, wie behauptet, eine *abzählbare* Menge.

Wir bezeichnen nun als *(reelle) algebraische Zahl n^{ter} Ordnung* jede (reelle) Zahl, welche einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades mit ganzzahligen Koeffizienten $g_n(x) = 0$, aber keiner derartigen Gleichung von niedrigerem Grade genügt.[1]

Da hiernach eine Gleichung n^{ten} Grades höchstens n algebraische Zahlen n^{ter} Ordnung liefert, so folgt, daß bei der zuvor angegebenen Aufzählung aller möglichen wesentlich verschiedenen Gleichungen n^{ten} Grades mit ganzzahligen Koeffizienten auch jede durch einen bestimmten Wert von s charakterisierte Gruppe höchstens eine *endliche* Anzahl von algebraischen Zahlen n^{ter} Ordnung liefert, die man sich dann eventuell der Größe nach geordnet denken kann. Daraus ergibt sich aber das folgende Resultat (welches im Falle $n = 1$ in das oben für die *rationalen* Zahlen gefundene übergeht):

Bedeutet n irgendeine natürliche Zahl, so bilden die algebraischen Zahlen n^{ter} Ordnung eine abzählbare Menge.[2]

---

1) So hat z. B., wenn die natürliche Zahl a keine Quadratzahl ist, die Gleichung

$$x^2 - a = 0$$

die beiden Lösungen $\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$, wo $\sqrt{a}$ eine bestimmte *Irrationalzahl* vorstellt, also eine Zahl, die keinesfalls einer Gleichung 1ten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten genügen kann. Somit sind $\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$ algebraische Zahlen 2ter Ordnung (andererseits *nicht* von der Ordnung $2m$, obschon sie offenbar auch der Gleichung

$$x^{2m} - a^m = 0$$

genügen).

Auch ist aus der im Texte gegebenen Definition der algebraischen Zahlen n^{ter} Ordnung ersichtlich, warum wir bei der Aufzählung der „verschiedenen" Gleichungen n^{ten} Grades den Fall $a_0 = 0$ von vornherein ausgeschlossen haben. Die Gleichung n^{ten} Grades:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x = 0$$

hat ja mit der durch Weglassung des gemeinsamen Faktors x entstehenden Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades:

$$a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1 = 0$$

alle Lösungen außer $x = 0$ gemein, kann also keine einzige algebraische Zahl n^{ter} Ordnung liefern.

2) Genau genommen folgt auf diesem Wege nur, daß die betreffenden Zahlen

Hiernach erscheint zunächst die Gesamtheit *aller möglichen* algebraischen Zahlen, also derjenigen von den Ordnungen 1, 2, 3, ⋯, als eine *abzählbare Menge von abzählbaren Mengen*. Daraus könnte nach dem S. 102, Fußnote 1 erwähnten Prinzip ohne weiteres geschlossen werden, daß die *Gesamtmenge* der algebraischen Zahlen gleichfalls abzählbar ist. Doch läßt sich die Möglichkeit der fraglichen Abzählung durch eine unerhebliche Abänderung des zuvor eingeschlagenen Verfahrens auch ganz direkt erkennen, indem man nämlich bei der Aufstellung aller möglichen in Betracht kommenden algebraischen Gleichungen statt der Gl. (10) die folgende zu grunde legt:

$$(11) \qquad |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| + n = \sigma$$

und für σ der Reihe nach alle natürlichen Zahlen $\geqq 3$ substituiert. Denkt man sich σ irgendwie fixiert, so hat man zunächst für den Grad n der Reihe nach $1, 2, \cdots, (\sigma - 2)$ zu setzen (wegen $|a_0| \geqq 1$, $|a_n| \geqq 1$ kann n nicht größer als $(\sigma - 2)$ werden), so daß also Gl. (11) in das folgende System von Gleichungen zerfällt:

$$(12) \qquad \begin{cases} |a_0| + |a_1| + 1 = \sigma \\ |a_0| + |a_1| + |a_2| + 2 = \sigma \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{\sigma-2}| + (\sigma - 2) = \sigma \end{cases}$$

(deren letzte beiläufig bemerkt nur $|a_0| = 1$, $|a_{\sigma-2}| = 1$ liefert). Zu jedem einzelnen σ gehört dann wiederum nur eine gewisse endliche Anzahl algebraischer Gleichungen von den Graden $1, 2, \cdots, (\sigma - 2)$, und man erhält offenbar auf diesem Wege für $\sigma = 3, 4, 5, \cdots$ alle möglichen in Betracht kommenden Gleichungen nach Gruppen der eben beschriebenen Art geordnet. Das entsprechende gilt dann für die aus diesen Gleichungen resultierenden algebraischen Zahlen, und man findet somit:

Die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar.[1])

6. Wir werden jetzt als genauer umschriebenen Inhalt der am Anfange dieses Paragraphen ausgesprochenen Behauptung, daß es „unvergleichlich" viel mehr *irrationale*, als *rationale* Zahlen gebe, zeigen, daß die

---

höchstens eine abzählbare Menge bilden. Auf den (mit algebraischen Hilfsmitteln zu führenden) Beweis, daß es wirklich immer *unendlich viele* algebraische Zahlen einer beliebigen n^{ten} Ordnung gibt, soll indessen hier nicht eingegangen werden.

1) Das in der vorigen Fußnote ausgesprochene Bedenken fällt hier natürlich weg, da es ja — ganz abgesehen von den (eine *Teilmenge* der algebraischen Zahlen bildenden) *rationalen* Zahlen — schon unter den Zahlen von der Form $\sqrt[n]{a}$ auch *unendlich viele irrationale* algebraische Zahlen gibt. (Hier kommt es ja im Gegensatz zu der vorhergehenden Betrachtung gar nicht darauf an, festzustellen, ob unter diesen Zahlen $\sqrt[n]{a}$ unendlich viele genau von der n^{ten} Ordnung sind.)

Mächtigkeit der *irrationalen* Zahlen eine *höhere* ist, als diejenige der *rationalen*. Hierzu beweisen wir zunächst den folgenden Satz:

Zu jeder beliebigen abzählbaren Zahlenmenge (A_ν) *gibt es unendlich viele Zahlen* B, *welche dieser Menge* **nicht** *angehören, und zwar gibt es sogar unendlich viele solche* B, *die sich von einem beliebig vorgeschriebenen* A_n *beliebig wenig unterscheiden.*

Beweis. Wie auch die A_ν beschaffen sein mögen, so können wir uns auf Grund unserer bisherigen Ergebnisse ohne Beschränkung der Allgemeinheit jedes A_ν in der Form eines *unbegrenzten*[1]) Dezimalbruches gegeben denken (also eventuell mit der eingliedrigen Periode 9), in der üblichen dezimalen Schreibweise[2]) etwa:

$$(13)\qquad \begin{cases} A_1 = g^{(1)},\ a_1^{(1)} a_2^{(1)} \cdots a_\mu^{(1)} \cdots \\ A_2 = g^{(2)},\ a_1^{(2)} a_2^{(2)} \cdots a_\mu^{(2)} \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_\nu = g^{(\nu)},\ a_1^{(\nu)} a_2^{(\nu)} \cdots a_\mu^{(\nu)} \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

Wird jetzt A_n beliebig ausgewählt und $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, so läßt sich zunächst m so fixieren, daß $\frac{1}{10^m} < \varepsilon$ und daher jeder Dezimalbruch, der mit A_n die ersten m Stellen gemein hat, also jeder von der Form

$$(14)\qquad B = g^{(n)},\ a_1^{(n)} a_2^{(n)} \cdots a_m^{(n)}\, b_{m+1}\, b_{m+2} \cdots b_{m+\nu} \cdots$$

sich vom A_m um weniger als ε unterscheidet. Wählt man nun die hierbei noch willkürlich bleibenden Ziffern $b_{m+1}, b_{m+2}, \cdots$ lediglich den folgenden Bedingungen genügend[3]):

$$b_{m+1} \gtrless a_{m+1}^{(1)},\quad b_{m+2} \gtrless a_{m+2}^{(2)},\quad \cdots,\quad b_{m+\nu} \gtrless a_{m+\nu}^{(\nu)},\quad \cdots,$$

---

1) Bezüglich des Inhalts dieser Aussage vgl. S. 111, Fußn. 1.

2) D. h. wenn

$$g,\ a_1 a_2 a_3 \cdots\cdots$$

die Bedeutung von

$$g + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots\cdots$$

hat. Dabei bedeutet also g eine *beliebige* natürliche Zahl oder auch die Null, jedes a_ν ($\nu = 1, 2, 3, \cdots$) eine *Ziffer*, d. h. eine der Zahlen 0, 1, $\cdots$, 9.

3) Da die $a_\mu^{(\nu)}$, $b_\mu^{(\nu)}$ *Ziffern*, also Zahlen aus der Reihe 0, 1, $\cdots$, 9 bedeuten, so ist im Falle

$$a_{m+\nu}^{(\nu)} = 0 \quad \text{bzw.} \quad a_{m+\nu}^{(\nu)} = 9$$

selbstverständlich *nur* die Wahl

$$b_{m+\nu} > a_{m+\nu}^{(\nu)} \quad \text{bzw.} \quad b_{m+\nu} < a_{m+\nu}^{(\nu)}$$

möglich.

und beachtet, daß zwei unbegrenzt fortsetzbare Dezimalbrüche nur dann *gleich* sein können, wenn sie Glied für Glied *identisch* sind[1]), so folgt, daß B von $A_1, A_2, \cdots, A_\nu, \cdots$ *verschieden* sein muß, also in der Menge der A_ν *nicht* vorkommt. Dabei hat man aber für die Auswahl von b_{m+1} *neun* Möglichkeiten (nämlich jede der Ziffern $0, 1, \cdots, 9$ mit Ausnahme von $a_{m+1}^{(1)}$), ebenso für b_{m+2}, was schon für die Besetzung dieser beiden Bruchstellen $9 \cdot 9$ verschiedene Möglichkeiten ergibt. So fortschließend findet man, daß auf dem angegebenen Wege eine (jede noch so hohe Potenz von 9 übersteigende, also) *unendliche* Menge unter sich und von den A_ν *verschiedener* unendlicher Dezimalbrüche B zum Vorschein kommt, sofern man nur noch die Vorsichtsmaßregel beobachtet, *nicht alle* Stellen von irgendeiner bestimmten ab mit *Nullen* zu besetzen[2]) (z. B. indem man die Festsetzung trifft, daß man niemals mehr als 100 unmittelbar aufeinanderfolgende Stellen mit *Nullen* besetzen soll).

7. Betrachtet man jetzt eine *ganz beliebig abzählbare* Menge von *Irrationalzahlen* und fügt zu dieser noch die Menge der *rationalen* Zahlen hinzu, so ist die so entstehende Gesamtmenge wieder eine *abzählbare.*[3]) Nach dem soeben bewiesenen Satze existieren dann noch *unendlich viele* — ja sogar *beliebig nahe* bei *jeder einzelnen* Zahl jener abzählbaren Menge *unendlich viele* — Zahlen, die der Menge *nicht* angehören. Und zwar müssen dies ausschließlich *irrationale* Zahlen sein, da ja alle rationalen Zahlen in der obigen Menge enthalten sind. Hieraus folgt aber, daß eine *abzählbare* Menge von Irrationalzahlen niemals *alle* Irrationalzahlen enthalten kann, mit anderen Worten:

Die Menge der irrationalen Zahlen ist nicht abzählbar.

Da die *irrationalen* Zahlen hiernach eine *andere* Mächtigkeit besitzen müssen, als die *rationalen*, und diese Mächtigkeit, wie die vorstehende Betrachtung lehrt, dadurch charakterisiert ist, daß nach Entfernung *jeder beliebigen* abzählbaren Menge immer noch unendlich viele Zahlen übrig bleiben, so spricht man das obige Resultat auch in folgender Weise aus:

Die Menge der irrationalen Zahlen ist von höherer Mächtigkeit, als jede abzählbare Menge, insbesondere diejenige der rationalen Zahlen.

---

1) S. § 20, Nr. 1 (S. 118).

2) In diesem Falle würde nämlich ein *endlicher* Dezimalbruch zum Vorschein kommen, der allenfalls einem der vorgelegten A_ν mit der Periode 9 *gleich* sein könnte.

3) Diese Aussage ist ja lediglich eine andere Fassung der schon früher benützten Tatsache, daß man irgendzwei Zahlenfolgen zu einer einzigen vereinigen kann.

8. Da, wie oben gezeigt wurde, auch die Menge der *algebraischen* Zahlen *abzählbar* ist, so folgt nach der zuvor benützten Schlußweise, daß nach Entfernung derselben aus der Menge der *reellen* Zahlen noch eine *nicht abzählbare* Menge von *Irrationalzahlen* zurückbleibt. Man bezeichnet diese letzteren, die also keiner algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten genügen können, als *transzendente* Zahlen.

Hiernach läßt sich die Gesamtheit der *reellen* Zahlen in die *abzählbare* Menge der (rationalen und irrationalen) *algebraischen* Zahlen und die *nicht abzählbare* Menge der *transzendenten* Irrationalzahlen zerlegen.

§ 26. Der Grenzwert einer Folge beliebiger reeller Zahlen. — Anwendung auf rationale Zahlenfolgen. — Die uneigentlichen Grenzwerte $+\infty$ und $-\infty$.

1. Es bedeute $A_0, A_1, \cdots, A_\nu, \cdots$, kürzer geschrieben (A_ν), eine unbegrenzt fortsetzbare Folge beliebiger reeller Zahlen. Alsdann soll die folgende *Definition* gelten:

*Wir sagen, die Folge (A_ν) besitze für unbegrenzt wachsendes ν, in Zeichen: für $\nu \to \infty$ (lies: für ν gegen unendlich), den **Grenzwert** oder **Limes** A, in Zeichen*[1]*:*

(1) $$\lim_{\nu\to\infty} A_\nu = A,$$

*wenn eine reelle Zahl A von der Beschaffenheit existiert, daß $|A - A_\nu|$ bei hinlänglicher Vergrößerung von ν **beliebig klein** wird, d. h. wenn zu beliebig klein vorgeschriebenem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n vorhanden ist, derart, daß für jedes $\nu \geqq n$:*

(2) $$|A - A_\nu| < \varepsilon.$$[2]

Damit diese Definition einen eindeutig bestimmten Sinn gewinnt, ist

---

1) Man schrieb früher und schreibt zumeist auch jetzt noch $\lim_{\nu=\infty} A_\nu$ an Stelle der hier benützten (soviel mir bekannt ist, von jüngeren englischen Mathematikern herrührenden) Bezeichnung $\lim_{\nu\to\infty} A_\nu$. Der wesentliche Vorzug dieser neueren Schreibweise tritt erst deutlich hervor, wenn irgendeine endliche *Zahl* diejenige Rolle übernimmt, welche in dem vorliegenden Zusammenhange das Zeichen ∞ spielt. Vgl. hierzu § 33, S. 201, Fußn. 1.

2) Im Falle $A = 0$ pflegt man natürlich

$$|A_\nu| < \varepsilon \quad \text{statt:} \quad |-A_\nu| < \varepsilon$$

zu schreiben.

Im übrigen sei hier noch ausdrücklich bemerkt, daß es, nachdem die Irrationalzahlen und die Gesetze, denen sie genügen, vollständig definiert sind, ganz gleichgültig ist, ob man sich diese ε jetzt rational oder irrational denkt. (Vgl. auch § 24, S. 147, Fußn. 1.)

vor allem zu zeigen, daß es, wenn überhaupt, immer nur eine einzige Zahl A der fraglichen Art gibt.

Angenommen, es gäbe noch eine Zahl A' von der gleichen Beschaffenheit, so müßte zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n sich so fixieren lassen, daß gleichzeitig[1]):

$$|A - A_\nu| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |A' - A_\nu| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für:} \quad \nu \geqq n.$$

Daraus folgt aber, daß

$$|A' - A| < \varepsilon$$

sein müßte, *wie klein* auch die positive Zahl ε angenommen werden möge, was wiederum nur möglich ist, wenn geradezu:

$$A' = A.$$

Hiermit ist implizite gesagt, daß ein bei früherer Gelegenheit für *rationale* Zahlen ausgesprochenes Beweisprinzip[2]) sich auch ohne weiteres auf beliebige *reelle* Zahlen übertragen läßt, nämlich:

Kann man von zwei reellen Zahlen A und A' nachweisen, daß $|A' - A| < \varepsilon$, wie klein auch die positive Zahl ε angenommen werden möge, so ist $A' = A$.

Denn ist etwa $A = [a_\nu]$, $A' = [a_\nu']$, so folgt:

$$|A' - A| = |[a_\nu' - a_\nu]| = [|a_\nu' - a_\nu|].$$

Die *konvergente* Folge *positiver rationaler* Zahlen $[|a_\nu - a_\nu'|]$ definiert aber entweder eine *bestimmte positive* Zahl oder die *Null*, und da die *erste* Möglichkeit wegen $|A' - A| < \varepsilon$ ausgeschlossen erscheint, so folgt $[|a_\nu' - a_\nu|] = 0$, d. h. $A' = A$.

2. Aus der obigen *Definition* des *Grenzwertes* einer Folge reeller Zahlen ergibt sich unmittelbar eine *notwendige* Bedingung für die *Existenz* eines solchen. Denn besitzt die Folge (A_ν) wiederum den Grenzwert A, so hat man:

$$|A - A_\nu| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad \nu \geqq n,$$

also auch:

$$|A - A_{\nu+\varrho}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad \nu \geqq n, \quad \varrho = 1, 2, 3, \cdots$$

und daher:

(3) $$|A_{\nu+\varrho} - A_\nu| < \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu \geqq n.$$

Diese Beziehung hat aber genau die Form, wie die Definitionsformel (III), § 22, Nr. 1 (S. 125) für die *Konvergenz* einer Folge *rationaler* Zahlen (d. h. sie geht in dieselbe über, wenn die A_ν *rationale*

1) Vgl. § 19, Nr. 1 (S. 113).
2) § 18, Nr. 1 (S. 108).

Zahlen sein sollten). Nennen wir also jetzt auch eine Folge *beliebiger reeller* Zahlen *konvergent*, falls dieselben der Bedingung (3) genügen, so läßt sich das eben gefundene Ergebnis folgendermaßen aussprechen:

> *Die Konvergenz einer Folge beliebiger reeller Zahlen A_ν bildet eine notwendige Bedingung für die Existenz eines bestimmten Grenzwertes $\lim_{\nu\to\infty} A_\nu$.*

Daß diese Bedingung in *jedem* Falle auch eine *hinreichende* ist, wird im übernächsten Paragraphen allgemein bewiesen werden. Hier soll dies zunächst nur für die *bisher* ausschließlich betrachtete Art konvergenter Zahlenfolgen, nämlich aus lauter *rationalen* Zahlen bestehende, festgestellt werden. Es gilt nämlich der folgende Satz:

> *Die durch eine konvergente Folge rationaler Zahlen a_ν bestimmte Zahl $[a_\nu]$ ist zugleich im Sinne der oben gegebenen Definition der Grenzwert der a_ν, sodaß also:*

$$\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = [a_\nu]. \tag{4}$$

Beweis. Ist die Folge der a_ν eine *rational-konvergente*, also $[a_\nu] = \{a_\nu\} = a$, so besagt das nach der in § 19, Ungl. (1) und (3) (S. 112, 115) gegebenen Definition lediglich, daß $|a - a_\nu|$ bzw. (im Falle $a = 0$) $|a_\nu|$ durch hinlängliche Vergrößerung von ν beliebig klein wird, und das ist nach Ungl. (2) auch der Inhalt der Aussage, daß die Folge der a_ν den *Grenzwert* a besitzt. Somit deckt sich in dem vorliegenden Falle die Behauptung (4) vollständig mit der Voraussetzung, daß die Folge der a_ν die rationale Zahl a darstellen sollte.

Ist $[a_\nu]$ nicht rational, so verlangt die Behauptung (4) auf Grund der definierenden Ungl. (2), daß zu beliebig vorgeschriebenem $\varepsilon > 0$:

$$|[a_\nu] - a_\mu| < \varepsilon \quad \text{etwa für} \quad \mu \geqq m.$$

Den absoluten Wert der Differenz $[a_\nu] - a_\mu$ für jedes einzelne μ liefert aber die Zahlenfolge $[|a_\nu - a_\mu|]$, wo $\nu = 0, 1, 2, \cdots$. Nimmt man jetzt $\delta < \varepsilon$ an, so kann man wegen der Konvergenz der Folge der a_ν ein m so fixieren, daß:

$$|a_{\mu+\varrho} - a_\mu| < \delta \quad \text{für} \quad \mu \geqq m,\ \varrho = 0, 1, 2, \cdots,$$

anders geschrieben:

$$|a_\nu - a_\mu| < \delta \quad \text{für} \quad \mu \geqq m,\ \nu \geqq \mu.$$

Alsdann ergibt sich aber mit Benützung von § 24, Ungl. (2), (2a) (S. 143), daß:

$$[|a_\nu - a_\mu|] \leqq \delta \quad \text{für jedes einzelne} \ \mu \geqq m,$$

und somit schließlich:

$$|[a_\nu] - a_\mu| \leqq \delta < \varepsilon \quad \text{für} \quad \mu \geqq m,$$

womit die fragliche Behauptung bewiesen ist. —

3. Zu dem vorstehenden Ergebnis sei noch ausdrücklich folgendes bemerkt. Es wurde zwar *bewiesen*, daß jeder *konvergenten* Folge *rationaler* Zahlen ein bestimmter *Grenzwert* zukomme, aber nicht etwa in *dem* Sinne, daß ein solcher Grenzwert *a priori* existiere oder daß seine *Existenz* vielleicht gar aus irgendwelchen *außerhalb* des Gebietes der reinen Zahlenlehre liegenden Tatsachen oder Analogien, z. B. sogenannten geometrischen Evidenzen, gefolgert werden könne. Vielmehr wurde nur gezeigt, daß unter den von uns *erschaffenen* Zahlen zu jeder konvergenten Folge *eine* vorhanden ist, welche die Eigenschaft besitzt, von allen Gliedern mit hinlänglich großem Index sich *beliebig wenig* zu unterscheiden. Und es ist daher in Wahrheit $\lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu$ lediglich ein *neues Zeichen* für eine bereits bei anderer Gelegenheit geschaffene Zahl $[a_\nu]$, welches gerade *diese* Eigenschaft *in Erinnerung bringen* soll.

Mit Hilfe *dieser neuen Bezeichnungsweise* lassen sich die in § 23, Formel (II)—(V), (5), (6), (10) (S. 138—142) enthaltenen Rechnungsregeln für beliebige reelle Zahlen auch in die folgende Form setzen:

(5) $\lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu \pm \lim\limits_{\nu \to \infty} b_\nu = \lim\limits_{\nu \to \infty} (a_\nu \pm b_\nu),$ (6) $\lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu \cdot \lim\limits_{\nu \to \infty} b_\nu = \lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu b_\nu,$

(7) $\dfrac{\lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu}{\lim\limits_{\nu \to \infty} b_\nu} = \lim\limits_{\nu \to \infty} \dfrac{a_\nu}{b_\nu},$ (8) $(\lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu)^{\pm m} = \lim\limits_{\nu \to \infty} (a_\nu^{\pm m}),$

(9) $$R(\lim_{\nu \to \infty} a_\nu, \lim_{\nu \to \infty} b_\nu, \cdots, \lim_{\nu \to \infty} k_\nu) = \lim_{\nu \to \infty} R(a_\nu, b_\nu, \cdots, k_\nu)$$

(wobei in (7) und (9) wiederum der Fall auszuschließen ist, daß einer der auftretenden Nenner den Grenzwert 0 besitzt).

Diese Formeln sind zunächst ihrem Ursprunge nach (d. h. wenn man von vornherein an Stelle von $[a_\nu]$, $[b_\nu]$, $\cdots$ die *Zeichen* $\lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu$, $\lim\limits_{\nu \to \infty} b_\nu$ eingeführt hätte) in *dem* Sinne zu verstehen, daß ihre *rechten* Seiten als *Definitionen* für die *links* verlangten Rechenoperationen zu gelten haben. Tritt nun aber der besondere Fall ein, daß die Zahlenfolgen $[a_\nu]$, $[b_\nu]$, $\cdots$, $[k_\nu]$ *rationale* Grenzwerte besitzen, etwa:

(10) $$\lim_{\nu \to \infty} a_\nu = a, \quad \lim_{\nu \to \infty} b_\nu = b, \quad \cdots, \quad \lim_{\nu \to \infty} k_\nu = k,$$

so stellen die linken Seiten ja schon auf Grund früherer Definitionen (die, wie wir wissen, mit den vorliegenden nicht im Widerspruch stehen) *bestimmte Zahlen* vor, können dann also auch *umgekehrt* zur *Berechnung* derjenigen Zahlen dienen, welche durch die *rechten* Seiten jener Formeln

dargestellt werden. Auf diese Weise ergibt sich z. B. aus (9) die Beziehung:

(11) $$\lim_{\nu \to \infty} R(a_\nu, b_\nu, \cdots, k_\nu) = R(a, b, \cdots, k),$$

welche in Wahrheit wiederum nur eine neue Schreibweise für die in § 23, Nr. 6 (S. 142) gewonnene Formel (13) ist.

4. Besitzt eine Folge *beliebiger reeller* Zahlen A_ν die Eigenschaft, daß, wie *groß* man auch die positive Zahl A annehme, stets eine natürliche Zahl n existiert, derart, daß:

(12) $$A_\nu > A \quad \text{für} \quad \nu \geqq n,$$

so sagt man, A_ν werde gleichzeitig mit ν *positiv unendlich groß* und schreibt:

(13) $$\lim_{\nu \to \infty} A_\nu = +\infty$$

(bzw. $= \infty$, falls kein Mißverständnis möglich ist, wie man ja im analogen Falle auch bei positiven *Zahlen* das Vorzeichen + wegzulassen pflegt). Man bedient sich dann im Anschluß an die Schreibweise (13) auch des — genau genommen eine *contradictio in adjecto* enthaltenden — Ausdruckes: A_ν habe für $\nu \to \infty$ den *(uneigentlichen) Grenzwert* $+\infty$.

Sind die A_ν so beschaffen, daß in analogem Sinne

(14) $$-A_\nu > A \quad \text{für} \quad \nu \geqq n$$

(anders ausgesprochen: sind die A_ν zum mindesten von einer bestimmten Stelle ab durchweg negativ und wachsen ihre absoluten Beträge mit unbegrenzt wachsendem ν selbst unbegrenzt), so sagt man, A_ν werde mit unendlich wachsendem ν *negativ unendlich groß*, oder auch: A_ν habe für $\nu \to \infty$ den *(uneigentlichen) Grenzwert* $-\infty$, in Zeichen:

(15) $$\lim_{\nu \to \infty} A_\nu = -\infty.$$

Wir bezeichnen Zahlenfolgen mit dem (uneigentlichen) Grenzwerte $+\infty$ oder $-\infty$ als *eigentlich divergente.*[1]) Ferner bedienen wir uns ge-

1) Ist
$$\lim_{\nu \to \infty} A_\nu = +\infty \quad \text{oder} \quad = -\infty,$$
so hat man offenbar in beiden Fällen:
$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{A_\nu} = 0.$$
Dagegen könnte umgekehrt aus der letzten Beziehung zunächst nur geschlossen werden, daß:
$$\lim_{\nu \to \infty} |A_\nu| = +\infty.$$
Nur, wenn zum mindesten für $\nu \geqq n$ *beständig* $A_\nu > 0$, bzw. $A_\nu < 0$, würde folgen:
$$\lim_{\nu \to \infty} A_\nu = +\infty \quad \text{bzw.} \quad = -\infty.$$

legentlich des Ausdruckes: für eine Zahlenfolge *existiere ein Grenzwert im weiteren Sinne*, wenn sie entweder eine *bestimmte Zahl* im Sinne der in Nr. 1 dieses Paragraphen gegebenen Definition als Grenzwert besitzt oder ihre Glieder für $\nu \to \infty$ *mit bestimmtem Vorzeichen* unendlich werden.

§ 27. Allgemeine Eigenschaften konvergenter Zahlenfolgen mit beliebigen reellen Gliedern.

1. Bedeutet $A^{(0)}, A^{(1)}, \cdots, A^{(\nu)}, \cdots$ eine unbegrenzte Folge *beliebiger reeller* Zahlen, so gilt als *Definition* ihrer *Konvergenz* nach § 26, Nr. 2, Ungl. (3) (S. 161) die Beziehung:

(1) $$|A^{(\nu+\sigma)} - A^{(\nu)}| < \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu \geqq n,\ \sigma = 1, 2, 3, \cdots.$$

Diese Bedingung, welche der Form nach vollständig mit der für die Konvergenz *rationaler* Zahlenfolgen $[c_\nu]$ in § 22 (S. 125) als Ungl. (III) bezeichneten übereinstimmt, läßt sich wiederum, indem man die dort in bezug auf die Zahlen c_ν gemachten Schlüsse *wörtlich* auf die $A^{(\nu)}$ überträgt, durch die folgenden, formal zwar *weniger verlangenden*, jedoch in ihrer Tragweite gänzlich *äquivalenten* (entsprechend den a. a. O. mit (II) bzw. (I) bezeichneten) ersetzen:

(2) $$|A^{(n+\sigma)} - A^{(n)}| < \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad \leqq \varepsilon \quad (\sigma = 1, 2, 3, \cdots),$$

d. h. es zieht nicht nur die Bedingung (1), wie unmittelbar ersichtlich ist, stets solche von der Form (2) nach sich, sondern (dem wesentlichen Inhalte nach) auch umgekehrt.

Obschon der Inhalt dieser Bedingungen durch die für beliebige reelle Zahlen geltenden Festsetzungen (§ 23) vollständig definiert ist, so erscheint es vielleicht nicht unzweckmäßig, zur Übung ihre letzten Grundlagen durch Zurückgreifen auf jene früheren Regeln im einzelnen etwas genauer nachzuprüfen.

Es sei etwa: $A^{(0)} = [a_\mu^{(0)}]$, $A^{(1)} = [a_\mu^{(1)}]$ usf., sodaß also jede der Zahlen $A^{(\nu)}$ durch eine Folge *rationaler* Zahlen $(a_0^{(\nu)}, a_1^{(\nu)}, \cdots, a_\mu^{(\nu)}, \cdots)$ bestimmt wird, dann läßt sich zunächst die *erste* der Forderungen (2) ausführlicher folgendermaßen schreiben:

(2a) $$|[a_\mu^{(n+\sigma)}] - [a_\mu^{(n)}]| < \varepsilon.$$

Auf Grund der Definition für die *Differenz* zweier reeller Zahlen (S. 140, Gl. (IV)) ist diese Beziehung gleichbedeutend mit der folgenden:

(2 $$|[a_\mu^{(n+\sigma)} - a_\mu^{(n)}]| < \varepsilon,$$

die sodann auf Grund der Definition des *absoluten Betrages* einer reellen Zahl (S. 143, Gl. (16)) durch die folgende ersetzt werden kann:

(2c) $$[|a_\mu^{(n+\sigma)} - a_\mu^{(n)}|] < \varepsilon.$$

Gleichzeitig mit den als konvergent anzusehenden Folgen $[a_\mu^{(n+\sigma)}]$, $[a_\mu^{(n)}]$ bilden auch die Zahlen $|a_\mu^{(n+\sigma)} - a_\mu^{(n)}|$ eine konvergente Folge, und damit diese eine (*eo ipso* keinesfalls negative) Zahl $< \varepsilon$ darstelle, ist nach § 24 Nr. 1, Fußn. 1 (S. 143) *notwendig*, daß für hinlänglich große μ

$$(2\,\mathrm{d}) \qquad |a_\mu^{(n+\sigma)} - a_\mu^{(n)}| < \varepsilon \quad (\sigma = 1, 2, 3, \cdots)$$

ausfällt, d. h. jedem $\varepsilon > 0$ muß sich zunächst eine natürliche Zahl n und sodann jedem einzelnen σ eine natürliche Zahl m_σ so zuordnen lassen, daß für das betreffende n und $\mu \geqq m_\sigma$ $(\sigma = 1, 2, 3, \cdots)$ die Bedingung (2d) erfüllt ist. Dabei bedeutet n eine von der Wahl des σ unabhängige *bestimmte* Zahl, während m_σ mit σ veränderlich sein kann.

Umgekehrt würde (nach § 24, Ungl. (1), (1a), S. 143) aus der Bedingung (2d) zunächst nur folgen, daß:

$$[|a_\mu^{(n+\sigma)} - a_\mu^{(n)}|] \leqq \varepsilon,$$

und man findet hieraus in entsprechender Weise weiter rückwärts schließend die Beziehung:

$$|A^{(n+\sigma)} - A^{(n)}| \leqq \varepsilon,$$

also die *zweite* der Bedingungen (2), welche ja dann gleichfalls die *Konvergenz* der Folge $(A^{(\nu)})$ nach sich zieht.

Da man übrigens ohne Beschränkung der Allgemeinheit ε stets als *rational* annehmen kann[1]), so zeigt Ungl. (2d), wie die Bedingung für die *Konvergenz* der Folge mit den *beliebig reellen* Gliedern A_ν lediglich durch Zurückgehen auf die bisherigen Definitionen schließlich auf Beziehungen zwischen *rationalen* Zahlen zurückgeführt werden kann.[2])

2. Da die Konvergenzdefinitionen (1) und (2) genau dieselbe Form besitzen, wie die entsprechenden für *rationale* Zahlenfolgen, und da die vier Spezies mit *beliebigen reellen* Zahlen denselben Gesetzen genügen, wie sie für *rationale* Zahlen gelten, so lassen sich an die obigen Definitionen *wörtlich* die gleichen Schlußfolgerungen knüpfen, welche in § 22 zur Feststellung der Haupteigenschaften *rationaler* Zahlenfolgen geführt haben. Insbesondere ergeben sich auf diese Weise die folgenden Sätze:

I. Ist die Folge $(A^{(\nu)})$ *konvergent*, so hat man für $\nu \geqq n$ *entweder* beständig: $A^{(\nu)} \geqq \alpha$, bzw. $A^{(\nu)} \leqq -\alpha$, wo α eine gewisse *positive* Zahl bedeutet; *oder* (zu jedem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ bei passender Wahl von n): $|A^{(\nu)}| < \varepsilon$.

---

1) Vgl. S. 160, Fußn. 1.

2) Eine praktisch einfachere Lösung dieser Aufgabe ist implizite in Nr. 1 des folgenden Paragraphen enthalten.

Im letzteren Falle ergibt sich aus der im vorigen Paragraphen, Nr. 1, aufgestellten Grenzwertdefinition ohne weiteres, daß:

(3) $$\lim_{\nu \to \infty} A^{(\nu)} = 0.$$

Da andererseits die Folge der $A^{(\nu)}$ schon *eo ipso konvergiert*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ bei passend gewähltem n: $|A^{(\nu)}| < \varepsilon$ für $\nu \geqq n$, so kann man auch folgendes aussagen:

Eine Folge beliebiger reeller Zahlen $A^{(\nu)}$, deren absolute Beträge mit unbegrenzt wachsendem ν beliebig klein werden, hat den Grenzwert Null.

II. Die absoluten Beträge der Glieder $A^{(\nu)}$ einer *konvergenten* Folge bleiben stets unter einer endlichen Schranke.

III. Gleichzeitig mit der Folge $(A^{(\nu)})$ *konvergiert* auch jede aus ihr *herausgehobene* Folge $(A^{(m_\nu)})$.

IV. Jede *monotone* Folge $(A^{(\nu)})$, deren Glieder numerisch unter einer endlichen Schranke bleiben, ist *konvergent*.[1]

V. Gleichzeitig mit den Folgen $(A^{(\nu)}), (B^{(\nu)}), \cdots, (K^{(\nu)})$ *konvergiert* auch die Folge $(R(A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, \cdots, K^{(\nu)}))$, wenn wieder $R(A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, \cdots, K^{(\nu)})$ einen *begrenzten rationalen Ausdruck* (s. S. 133) bedeutet und vorausgesetzt wird, daß keiner der in R auftretenden Nenner 0 ist oder den Grenzwert Null hat. Insbesondere konvergieren also unter den gemachten Voraussetzungen die Folgen: $(-A^{(\nu)})$, $\left(\frac{1}{A^{(\nu)}}\right)$, $(A^{(\nu)\pm m})$, $(A^{(\nu)} \pm B^{(\nu)})$, $(A^{(\nu)} \cdot B^{(\nu)})$, $\left(\frac{A^{(\nu)}}{B^{(\nu)}}\right)$.

§ 28. Existenz eines Grenzwertes für jede konvergente Folge mit beliebigen reellen Gliedern. — Allgemeine Grenzwertbeziehungen.

1. Wir beweisen jetzt den folgenden, zuweilen als *Fundamentalsatz der Analysis* oder als *allgemeines Konvergenzprinzip* bezeichneten, überaus wichtigen Satz:

Jede konvergente Zahlenfolge hat einen bestimmten Grenzwert.

Oder auch, mit Berücksichtigung von § 26, Nr. 2 (S. 162) etwas ausführlicher formuliert:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines bestimmten $\lim_{\nu \to \infty} A^{(\nu)}$ besteht in der Konvergenz

---

1) Bleiben die $|A^{(\nu)}|$ *nicht* unter einer endlichen Schranke, so ist die *monotone* Folge $(A^{(\nu)})$ offenbar stets *eigentlich* divergent (s. S. 164).

der Folge $(A^{(\nu)})$, *d. h. in der Existenz einer Beziehung von der Form:*

(1) $$|A^{(\nu+\sigma)} - A^{(\nu)}| < \varepsilon \quad (\nu \geqq n, \ \sigma = 1, 2, 3, \cdots)$$

für jedes $\varepsilon > 0$.

Beweis. Da die *Notwendigkeit* der Bedingung (1) a. a. O. bereits erwiesen wurde, so bleibt nur zu zeigen, daß sie auch *hinreichend* ist. Hierzu nehme man eine unbegrenzte Folge *positiver rationaler* Zahlen δ_ν so an, daß:

(2) $$\lim_{\nu \to \infty} \delta_\nu = 0.$$

Alsdann läßt sich nach § 24, Nr. 2 (S. 145) jeder der (im allgemeinen *irrationalen*[1])) Zahlen $A^{(\nu)}$ eine *rationale* Zahl a_ν so zuordnen, daß:

$$a_\nu - \delta_\nu < A^{(\nu)} < a_\nu + \delta_\nu,$$

also:

(3) $$|A^{(\nu)} - a_\nu| < \delta_\nu.$$

Die *rationale* Folge (a_ν) ist dann ebenfalls stets *konvergent*. Man hat nämlich:

$$|a_{\nu+\sigma} - a_\nu| = |(a_{\nu+\sigma} - A^{(\nu+\sigma)}) + (A^{(\nu)} - a_\nu) + (A^{(\nu+\sigma)} - A^{(\nu)})|$$
$$\leqq |A^{(\nu+\sigma)} - a_{\nu+\sigma}| + |A^{(\nu)} - a_\nu| + |A^{(\nu+\sigma)} - A^{(\nu)}|$$

(4) $$< \delta_{\nu+\sigma} + \delta_\nu + |A^{(\nu+\sigma)} - A^{(\nu)}|.$$

Infolge der Voraussetzungen (1) und (2) läßt sich nun n so fixieren, daß für $\nu \geqq n$ gleichzeitig:

$$|A^{(\nu+\sigma)} - A^{(\nu)}| < \frac{\varepsilon}{3}; \quad \delta_\nu < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{also auch: } \delta_{\nu+\sigma} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alsdann geht aber Ungleichung (4) in die folgende über:

(5) $$|a_{\nu+\sigma} - a_\nu| < \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu \geqq n,$$

d. h. die *rationale* Zahlenfolge (a_ν) ist konvergent und definiert somit eine bestimmte Zahl $A = [a_\nu]$. Man hat nun ferner:

$$|A - A^{(\nu)}| = |(A - a_\nu) - (A^{(\nu)} - a_\nu)|$$

(6) $$\leqq |A - a_\nu| + \delta_\nu.$$

Infolge der Beziehung $A = [a_\nu]$ und der Gleichung (2) kann man aber wiederum ein n so fixieren, daß für $\nu \geqq n$ gleichzeitig:

$$|A - a_\nu| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \delta_\nu < \frac{\varepsilon}{2},$$

und somit:

$$|A - A^{(\nu)}| < \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu \geqq n,$$

1) Der Fall *rationaler* $A^{(\nu)}$ ist ja bereits erledigt. Sollte $A^{(\nu)}$ für gewisse Werte von ν *rational* sein, so kann man einfach setzen: $a_\nu = A^{(\nu)}$.

d. h. man findet schließlich:

(7)
$$\lim_{\nu\to\infty} A^{(\nu)} = A \quad (= \lim_{\nu\to\infty} a_\nu).$$

Daß es im übrigen nur *eine* Zahl $A = \lim_{\nu\to\infty} A^{(\nu)}$ geben kann, wurde bereits in § 26, Nr. 1 (S. 161) hervorgehoben.

2. Daß es wegen der großen Willkürlichkeit, welche bezüglich der Auswahl der Zahlen δ_ν und a_ν besteht, *unendlich viele verschiedene* rationale Folgen zur Definition der Zahl A gibt, hat nichts überraschendes, da ja *jede* reelle Zahl A durch *unendlich viele verschiedene* Zahlenfolgen definiert werden kann (§ 23, Nr. 2, S. 136).

Im übrigen wird man jene Zahlen a_ν am einfachsten denjenigen Zahlenfolgen $[a_\mu^{(\nu)}]$ entnehmen, welche zur Definition der $A^{(\nu)}$ vorhanden sind. Sind nämlich die δ_ν irgendwie angenommen, so kann man, wegen $A^{(\nu)} = \lim_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$, für jedes $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ eine positive ganze Zahl m_ν so bestimmen, daß:

(8)
$$|A^{(\nu)} - a_{m_\nu}^{(\nu)}| < \delta_\nu .$$

Man hat sodann (s. Ungl. (3), Gl. (7)):

(9)
$$a_\nu = a_{m_\nu}^{(\nu)} \quad \text{und:} \quad \lim_{\nu\to\infty} A^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} a_{m_\nu}^{(\nu)}.$$ [1]

Sind insbesondere die $A^{(\nu)}$ durch systematische Brüche definiert — etwa: $A^{(\nu)} = \lim_{\mu\to\infty} \sigma_\mu^{(\nu)}$ —, so hat man (vgl. § 24, Ungl. (15), S. 148):

$$\sigma_\mu^{(\nu)} < A^{(\nu)} < \sigma_\mu^{(\nu)} + \frac{1}{b^\mu} \quad (\mu = 0, 1, 2, \cdots),$$

also speziell für $\mu = \nu$:

(10)
$$|A^{(\nu)} - \sigma_\nu^{(\nu)}| < \frac{1}{b^\nu},$$

und da offenbar die Wahl $\delta_\nu = \frac{1}{b^\nu}$ der fraglichen Bedingung $\lim_{\nu\to\infty} \delta_\nu = 0$ genügt, so kann man in diesem Falle setzen:

(11)
$$a_\nu = \sigma_\nu^{(\nu)}, \quad \text{d. h. schließlich:} \quad \lim_{\nu\to\infty} A^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} \sigma_\nu^{(\nu)}.$$ [2]

3. Aus der Existenz eines eindeutig bestimmten $\lim_{\nu\to\infty} A^{(\nu)}$ für jede konvergente Folge $A^{(\nu)}$ lassen sich im Anschlusse an die Sätze von Nr. 2 des vorigen Paragraphen noch die folgenden Schlüsse ziehen:

I. Hebt man aus der konvergenten Folge $[A^{(\nu)}]$ irgendeine Teilfolge $[A^{(n_\nu)}]$ heraus (deren Konvergenz nach (III), S. 167, feststeht), so hat man:

(12)
$$\lim_{\nu\to\infty} A^{(n_\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} A^{(\nu)}.$$

---

1) Da die m_ν nur an eine *untere* Schranke gebunden sind, so kann man dieselben speziell so auswählen, daß sie mit ν beständig wachsen. Vgl. hierzu § 42, S. 271, Fußn. 2 und S. 273, Fußn. 1.

2) Vgl. hierzu § 43, Nr. 4 (S. 290, Fußn. 2).

Umgekehrt: Ist $\lim\limits_{\nu\to\infty} A_1^{(\nu)} = \lim\limits_{\nu\to\infty} A_2^{(\nu)}$ und bedeutet $(A^{(\nu)})$ eine aus den Termen $A_1^{(\nu)}$, $A_2^{(\nu)}$ *zusammengesetzte* Folge, so *konvergiert* $(A^{(\nu)})$ und zwar ist:

(13) $$\lim_{\nu\to\infty} A^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} A_1^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} A_2^{(\nu)}$$

(Beweise genau wie in § 23, Nr. 4 S. (138)).

II. Aus dem ersten der eben ausgesprochenen Sätze folgt unmittelbar: Enthält eine *konvergente* Folge $[A^{(\nu)}]$ irgendeinen Term A unendlich oft (d. h. hat man für irgendeine Folge (n_ν) unbegrenzt wachsender natürlicher Zahlen: $A^{(n_\nu)} = A$), so ist auch:

(14) $$\lim_{\nu\to\infty} A^{(\nu)} = A.$$

III. Jede *monotone* Folge, deren Terme numerisch unter einer positiven Zahl bleiben, besitzt einen bestimmten Grenzwert.[1])

IV. Sind $[A^{(\nu)}], [B^{(\nu)}], \cdots, [K^{(\nu)}]$ *konvergente* Folgen und bedeutet $R(A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, \cdots, K^{(\nu)})$ irgendeinen *begrenzten rationalen Ausdruck* (s. § 22, Nr. 8, S. 133), so ist:

(15) $$R(\lim_{\nu\to\infty} A^{(\nu)}, \lim_{\nu\to\infty} B^{(\nu)}, \cdots, \lim_{\nu\to\infty} K^{(\nu)}) = \lim_{\nu\to\infty} R(A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, \cdots, K^{(\nu)}),$$

vorausgesetzt, daß *keiner* der in R auftretenden Nenner *Null* ist.

Beweis. Nach Nr. 1 kann man jeder der Folgen

$$[A^{(\nu)}], [B^{(\nu)}], \cdots, [K^{(\nu)}]$$

eine *rationale* Folge

$$[a_\nu], [b_\nu], \cdots, [k_\nu]$$

so zuordnen, daß:

(16) $$\lim_{\nu\to\infty} A^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} a_\nu, \quad \lim_{\nu\to\infty} B^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} b_\nu, \quad \cdots, \quad \lim_{\nu\to\infty} K^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} k_\nu.$$

Man hat also:

(17) $$R(\lim_{\nu\to\infty} A^{(\nu)}, \lim_{\nu\to\infty} B^{(\nu)}, \cdots, \lim_{\nu\to\infty} K^{(\nu)}) = R(\lim_{\nu\to\infty} a_\nu, \lim_{\nu\to\infty} b_\nu, \cdots, \lim_{\nu\to\infty} k_\nu).$$

Nun ist nach Gl. (9) des § 26, Nr. 3 (S. 163):

$$R(\lim_{\nu\to\infty} a_\nu, \lim_{\nu\to\infty} b_\nu, \cdots, \lim_{\nu\to\infty} k_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} R(a_\nu, b_\nu, \cdots, k_\nu),$$

sodaß man die Gl. (17) zunächst durch die folgende ersetzen kann:

(18) $$R(\lim_{\nu\to\infty} A^{(\nu)}, \lim_{\nu\to\infty} B^{(\nu)}, \cdots, \lim_{\nu\to\infty} K^{(\nu)}) = \lim_{\nu\to\infty} R(a_\nu, b_\nu, \cdots, k_\nu).$$

---

1) Bleiben die Glieder einer *monotonen* Folge $(A^{(\nu)})$ numerisch *nicht* unter einer endlichen Schranke, so hat man (vgl. S. 167, Fußn. 1): $\lim\limits_{\nu\to\infty} A^{(\nu)} = +\infty$ oder: $\lim\limits_{\nu\to\infty} A^{(\nu)} = -\infty$. *Jede monotone* Folge besitzt also einen *Grenzwert* zum mindesten *im weiteren Sinne* (s. den Schluß von § 26, S. 165).

Bildet man jetzt diejenigen Zahlenfolgen, die aus den Termen $(A^{(\nu)}, a_\nu)$, $(B^{(\nu)}, b_\nu)$, $\cdots$, $(K^{(\nu)}, k_\nu)$ zusammengesetzt sind, und bezeichnet dieselben mit $(\mathfrak{A}_\nu)$, $(\mathfrak{B}_\nu)$, $\cdots$, $(\mathfrak{K}_\nu)$, so sind dieselben *konvergent* (nach dem zweiten Satze von I dieser Nummer) und es *konvergiert* auch die Folge $[R(\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu, \cdots, \mathfrak{K}_\nu)]$ (nach § 27, V, S. 167). Sie besitzt daher einen bestimmten *Grenzwert*, welcher (nach I dieser Nummer) auch jeder *herausgehobenen* Folge zukommt, man hat also:

$$\lim_{\nu\to\infty} R(\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu, \cdots, \mathfrak{K}_\nu) \begin{cases} = \lim\limits_{\nu\to\infty} R(a_\nu, b_\nu, \cdots, k_\nu) \\ = \lim\limits_{\nu\to\infty} R(A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, \cdots, K^{(\nu)}), \end{cases}$$

sodaß Gl. (18) schließlich in die folgende übergeht:

$$R(\lim_{\nu\to\infty} A^{(\nu)}, \lim_{\nu\to\infty} B^{(\nu)}, \cdots, \lim_{\nu\to\infty} K^{(\nu)}) = \lim_{\nu\to\infty} R(A^{(\nu)}, B^{(\nu)}, \cdots, K^{(\nu)}),$$

womit die ausgesprochene Behauptung (15) bewiesen ist. —

Es bestehen also für solche allgemeine Grenzwerte vom Typus $\lim\limits_{\nu\to\infty} A^{(\nu)}$ dieselben Fundamentalbeziehungen, wie für Grenzwerte *rationaler* Folgen, insbesondere:

$$(19) \qquad -\lim_{\nu\to\infty} A^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty}(-A^{(\nu)}), \quad \frac{1}{\lim\limits_{\nu\to\infty} A^{(\nu)}} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{A^{(\nu)}},$$

$$(\lim_{\nu\to\infty} A^{(\nu)})^{\pm m} = \lim_{\nu\to\infty}(A^{(\nu)\pm m})$$

$$(20) \quad \lim_{\nu\to\infty} A^{(\nu)} \pm \lim_{\nu\to\infty} B^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty}(A^{(\nu)} \pm B^{(\nu)}), \quad \lim_{\nu\to\infty} A^{(\nu)} \cdot \lim_{\nu\to\infty} B^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} A^{(\nu)} \cdot B^{(\nu)},$$

$$\frac{\lim\limits_{\nu\to\infty} A^{(\nu)}}{\lim\limits_{\nu\to\infty} B^{(\nu)}} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{A^{(\nu)}}{B^{(\nu)}}.$$

Schließlich sei noch folgendes bemerkt. Bedeuten wieder $[A^{(\nu)}]$, $[B^{(\nu)}]$ konvergente Folgen und hat man zum mindesten für $\nu \geqq n$:

$$(21) \qquad A^{(\nu)} < B^{(\nu)}, \quad \text{also:} \quad A^{(\nu)} - B^{(\nu)} < 0,$$

so läßt sich daraus nur folgern, daß:

$$\lim_{\nu\to\infty}(A^{(\nu)} - B^{(\nu)}) \leqq 0,$$

also, wegen: $\lim\limits_{\nu\to\infty}(A^{(\nu)} - B^{(\nu)}) = \lim\limits_{\nu\to\infty} A^{(\nu)} - \lim\limits_{\nu\to\infty} B^{(\nu)}$, schließlich:

$$(22) \qquad \lim_{\nu\to\infty} A^{(\nu)} \leqq \lim_{\nu\to\infty} B^{(\nu)}.$$ [1]

Hat man ferner zum mindesten für $\nu \geqq n$:

$$(23) \qquad A^{(\nu)} < B^{(\nu)} < C^{(\nu)} \quad \text{oder auch:} \quad A^{(\nu)} \leqq B^{(\nu)} \leqq C^{(\nu)}$$

1) Die Beziehung (22) gilt offenbar auch im Falle: $\lim\limits_{\nu\to\infty} B^{(\nu)} = +\infty$.

und es besteht außerdem die Beziehung:

(24) $$\lim_{\nu \to \infty} A^{(\nu)} = \lim_{\nu \to \infty} C^{(\nu)}$$

(und zwar gleichgültig, ob diese Grenzwerte *endlich* oder *unendlich* ausfallen), so folgt:

(25) $$\lim_{\nu \to \infty} B^{(\nu)} \begin{cases} = \lim_{\nu \to \infty} A^{(\nu)} \\ = \lim_{\nu \to \infty} C^{(\nu)}, \end{cases}$$

eine Schlußweise, welche für die Bestimmung von Grenzwerten häufig von Nutzen ist.

Kapitel IV.

Potenzen mit beliebigem Exponenten und Logarithmen.

§ 29. Wurzeln aus positiven reellen Zahlen und gebrochene Potenzen mit positiver reeller Basis.

1. Das Problem, welches zunächst den Anlaß zur Einführung der *allgemeinen reellen* und insbesondere der *irrationalen* Zahlen gegeben hatte, nämlich die Auflösung der Gleichung:

(1) $$x^m = a$$

(wo a eine positive ganze Zahl, die *nicht* gerade gleich der m^{ten} Potenz einer anderen natürlichen Zahl), läßt sich nunmehr ganz in dem oben (§ 21, Nr. 5, S. 124) bereits angedeuteten Sinne erledigen. Wir fanden zunächst in dem eben zitierten Paragraphen einen unbegrenzt fortsetzbaren Systembruch σ_ν, welcher der Beziehung genügte (S. 122, Gl. (8)):

(2) $$\{\sigma_\nu{}^m\} = a, \quad \text{anders geschrieben}^{1)}, \quad [\sigma_\nu{}^m] = a.$$

Da aber nunmehr $[\sigma_\nu]$ *eine bestimmte Zahl* vorstellt (§ 23, Nr. 2, S. 136) und außerdem nach Gl. (5), S. 141:

(3) $$[\sigma_\nu]^m = [\sigma_\nu{}^m],$$

so folgt:

(4) $$[\sigma_\nu]^m = a, \quad \text{also:} \quad \sqrt[m]{a} = [\sigma_\nu].$$

Die offenbar allemal *positive* und *irrationale* Zahl $[\sigma_\nu]$ liefert somit eine *Lösung* der Gleichung $x^m = a$, und zwar, wie leicht zu sehen, *deren einzige positive* Lösung. Denn aus:

$$[\sigma_\nu]^m = [\tau_\nu]^m = a$$

würde folgen:

$$0 = [\sigma_\nu]^m - [\tau_\nu]^m = ([\sigma_\nu] - [\tau_\nu])([\sigma_\nu]^{m-1} + [\sigma_\nu]^{m-2}[\tau_\nu] + \cdots + [\tau_\nu]^{m-1}).$$

---

1) Vgl § 23, Nr. 1 (S. 134).

Ist nun $[\tau_\nu] > 0$, also der zweite Faktor der rechten Seite wesentlich positiv, so folgt:

$$[\sigma_\nu] - [\tau_\nu] = 0,$$

also:

$$[\tau_\nu] = [\sigma_\nu].$$

2. Tritt an die Stelle der natürlichen Zahl a ein positiver reduzierter Bruch $\frac{p}{q}$, so bestimme man zur Auflösung der Gleichung $x^m = \frac{p}{q}$ zunächst, wie in Nr. 1, zwei positive Zahlen $[\sigma_\nu']$, $[\sigma_\nu'']$ (deren jede sich speziell auch auf eine *ganze* Zahl reduzieren kann), derart, daß:

(5) $$[\sigma_\nu']^m = p, \quad [\sigma_\nu'']^m = q.$$

Da sodann:

$$\frac{[\sigma_\nu']^m}{[\sigma_\nu'']^m} = \frac{[\sigma_\nu'^m]}{[\sigma_\nu''^m]} = \left[\frac{\sigma_\nu'^m}{\sigma_\nu''^m}\right] = \left[\left(\frac{\sigma_\nu'}{\sigma_\nu''}\right)^m\right] = \left[\frac{\sigma_\nu'}{\sigma_\nu''}\right]^m,$$

so folgt schließlich:

(6) $$\left[\frac{\sigma_\nu'}{\sigma_\nu''}\right]^m = \frac{p}{q}, \quad \text{also:} \quad \sqrt[m]{\frac{p}{q}} = \left[\frac{\sigma_\nu'}{\sigma_\nu''}\right].$$

Man kann aber auch behufs Auflösung der Gleichung $x^m = \frac{p}{q}$ auf die Zahl $\frac{p}{q}$ ganz direkt das nämliche Einschließungsverfahren anwenden, wie im § 21 auf die ganze Zahl a. Man gelangt auf diese Weise entweder nach einer *begrenzten* Anzahl von Operationen zu einer *Gleichung* von der Form:

(7) $$\sigma_n^m = \frac{p}{q}, \quad \text{wo:} \quad \sigma_n = a_0 + \frac{a_1}{b} + \cdots + \frac{a_n}{b^n},$$

oder zu einem *unbegrenzt fortsetzbaren* Systeme von *Ungleichungen* der Form:

(8) $$\sigma_\nu^m < \frac{p}{q} < \left(\sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu}\right)^m, \quad \text{d. h. man findet:} \quad [\sigma_\nu]^m = \frac{p}{q}.$$

Dabei kann jedoch im Gegensatz zu dem vorher behandelten Falle $[\sigma_\nu]$ hier auch *periodisch* ausfallen, also eine *rationale* Zahl $\frac{u}{v}$ vorstellen. Man hat alsdann: $\frac{p}{q} = \left(\frac{u}{v}\right)^m = \frac{u^m}{v^m}$, also wenn man p zu q, u zu v als relativ prim voraussetzt: $p = u^m$, $q = v^m$. Das *zweite* Verfahren würde also in diesem Falle auf einen *unbegrenzten* Prozeß führen, während das *erste* nach einer *endlichen* Anzahl von Versuchen die fragliche Lösung liefern müßte.

3. Das in Rede stehende, im § 21 näher auseinandergesetzte Einschließungsverfahren liefert aber offenbar auch noch die Auflösung der Gleichung $x^m = A$, wenn A eine *beliebige reelle positive* Zahl bedeutet. Nur ist, wenn A *irrational*, das Auftreten einer *Gleichung* von der Form

$\sigma_n^m = A$ oder eines unbegrenzten *periodischen* Bruches $[\sigma_\nu]$ hier definitiv *ausgeschlossen*, da die m^{te} Potenz einer *rationalen* Zahl niemals der *Irrationalzahl* A gleich sein kann. Man findet hier also allemal ein unbegrenzt fortsetzbares System von der Form:

$$(9) \qquad \sigma_\nu^m < A < \left(\sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu}\right)^m \quad \text{und hieraus:} \quad [\sigma_\nu]^m = A,$$

wo $[\sigma_\nu]$ eine positive Irrationalzahl vorstellt. Und man erkennt, genau wie in Nr. 1, daß es stets *nur eine positive* Zahl geben kann, welche der Gleichung $x^m = A$ genügt.

4. Nachdem nunmehr die *Existenz* von $\sqrt[n]{A}$, d. h. der *positiven* n^{ten} Wurzel aus der *positiven reellen* Zahl A, als einer *eindeutig bestimmten reellen* Zahl erwiesen ist, lassen sich die Rechnungsregeln für solche *Wurzeln* mit Hilfe der für *Potenzen* geltenden in folgender Weise feststellen. Da die *Definitionsgleichungen* bestehen:

$$(10) \qquad (\sqrt[n]{A})^n = A, \quad (\sqrt[n]{B})^n = B,$$

so folgt:

$$(\sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B})^n = AB, \quad \left(\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}\right)^n = \frac{A}{B},$$

also:

$$(11) \quad \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{AB}, \quad \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}} = \sqrt[n]{\frac{A}{B}} \quad \left(\text{speziell: } \frac{1}{\sqrt[n]{B}} = \sqrt[n]{\frac{1}{B}}\right).$$

Wendet man die erste dieser Gleichungen sukzessive zur Bildung eines Produktes von m gleichen Faktoren $\sqrt[n]{A}$ an, so ergibt sich:

$$(12) \quad (\sqrt[n]{A})^m = \sqrt[n]{A^m} \quad \text{und hieraus:} \quad (\sqrt[n]{A})^{-m} = \frac{1}{\sqrt[n]{A^m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{A^m}} = \sqrt[n]{A^{-m}}.$$

Nach Gl. (10) hat man ferner:

$$(\sqrt[n]{A^{\pm m}})^n = A^{\pm m}, \quad \text{also:} \quad (\sqrt[n]{A^{\pm m}})^{pn} = A^{\pm pm} \quad (\text{wo } p > 0),$$

und daher:

$$(13) \qquad \sqrt[pn]{A^{\pm pm}} = \sqrt[n]{A^{\pm m}}.$$

Weiter ergibt sich:

$$A = (\sqrt[mn]{A})^{mn} \begin{cases} = \left((\sqrt[mn]{A})^m\right)^n, \\ = \left((\sqrt[mn]{A})^n\right)^m, \end{cases} \quad \text{also:} \quad \begin{cases} (\sqrt[mn]{A})^m = \sqrt[n]{A}, \\ (\sqrt[mn]{A})^n = \sqrt[m]{A}, \end{cases}$$

und somit:

$$(14) \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{A}} = \sqrt[mn]{A}.$$

Um auch noch das Produkt oder den Quotienten zweier Wurzeln von der Form $\sqrt[n]{A^m}$, $\sqrt[n']{A^{m'}}$ (wo $n>0$, $n'>0$, während m, m' beliebige Vorzeichen haben dürfen) durch eine einzige Wurzel darzustellen, hat man zunächst nach Gl. (13):

$$(13\text{a})\qquad \sqrt[n]{A^m} = \sqrt[nn']{A^{mn'}}, \quad \sqrt[n']{A^{m'}} = \sqrt[nn']{A^{m'n}},$$

und daher mit Benützung von Gl. (11):

$$(15)\qquad \sqrt[n]{A^m}\cdot\sqrt[n']{A^{m'}} = \sqrt[nn']{A^{mn'+m'n}}, \quad \frac{\sqrt[n]{A^m}}{\sqrt[n']{A^{m'}}} = \sqrt[nn']{A^{mn'-m'n}}.$$

Schließlich erkennt man noch unmittelbar die Richtigkeit der Ungleichung:

$$(16)\qquad \sqrt[n]{A} > \sqrt[n]{B}, \quad \text{wenn:} \quad (\sqrt[n]{A})^n > (\sqrt[n]{B})^n, \quad \text{d. h. } A > B,$$

aus welcher sich zunächst noch die folgende ergibt:

$$\sqrt[nn']{A^{mn'}} > \sqrt[nn']{A^{m'n}}, \quad \text{wenn:} \quad A^{mn'} > A^{m'n},$$

d. h. mit Benützung von (13a):

$$(17)\qquad \sqrt[n]{A^m} > \sqrt[n']{A^{m'}}, \quad \text{wenn:} \begin{cases} A>1, & mn' > m'n, \\ A<1, & mn' < m'n, \end{cases}$$ [1]

und speziell für $m = m' = 1$:

$$(17\text{a})\qquad \sqrt[n]{A} > \sqrt[n']{A}, \quad \text{wenn:} \begin{cases} A>1, & n' > n, \\ A<1, & n' < n. \end{cases}$$

5. Da die *formale* Anwendung der für positive ganzzahlige p, n geltenden Regel: $(A^{\pm p})^n = A^{\pm pn}$ auf das *Symbol* $A^{\pm\frac{m}{n}}$ die Beziehung liefert:

$$\left(A^{\pm\frac{m}{n}}\right)^n = A^{\pm m},$$

und andererseits die Definitionsgleichung besteht:

$$(\sqrt[n]{A^{\pm m}})^n = A^{\pm m},$$

so *definiert* man das obige *Symbol* als eine im Falle $A>0$ *eindeutig bestimmte reelle Zahl* durch die Gleichung:

$$(18)\quad A^{\pm\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{A^{\pm m}}, \quad \text{sodaß also:} \quad (18\text{a})\quad A^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{A^{-m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{A^m}} = \frac{1}{A^{\frac{m}{n}}}.$$

---

1) Dabei ist wiederum $n>0$, $n'>0$ angenommen, während m, m' beliebige Vorzeichen haben dürfen.

Man bemerke, daß alsdann Gl. (13) die Form annimmt:

(19) $$A^{\pm\frac{pm}{pn}} = A^{\pm\frac{m}{n}},$$

d. h. die durch das Symbol $A^{\pm\frac{m}{n}}$ repräsentierte Zahl hängt *nicht* von den *einzelnen ganzen Zahlen* m und n, sondern lediglich von der *rationalen* Zahl $\pm\frac{m}{n} = c$ ab. Damit ist also der Begriff der *Potenz* auf den Fall *eines beliebigen rationalen Exponenten* übertragen und zwar in *der* Weise, daß der bisher ausschließlich zugelassene Fall eines *ganzzahligen* Exponenten, d. h. der Fall $m = pn$, sich dieser allgemeineren Definition unterordnet. Für $m = pn$ resultiert nämlich aus Gl. (18) (mit Benützung von Gl. (12)):

$$A^{\pm\frac{pn}{n}} = \sqrt[n]{A^{\pm pn}} = (\sqrt[n]{A^{\pm p}})^n = A^{\pm p}.$$

Man bezeichnet dann solche Potenzen A^c, falls c *keine* ganze Zahl, als *gebrochene* und im Gegensatz hierzu als *ganze*, wenn c eine ganze Zahl.

Im übrigen genügt dann dieses erweiterte Potenzsymbol A^c den nämlichen Verknüpfungsregeln, wie die *ganze* Potenz. Setzt man wiederum $c = \frac{m}{n}$, wobei man offenbar allemal n als *wesentlich positiv* annehmen kann, während jetzt m eine *positive oder negative* (ganze) Zahl vorstellen mag, so folgt aus Gl. (11) durch Substitution von A^m, B^m für A, B und Einführung des neuen Symbols (18) zunächst:

$$A^{\frac{m}{n}} \cdot B^{\frac{m}{n}} = (AB)^{\frac{m}{n}}, \quad \frac{A^{\frac{m}{n}}}{B^{\frac{m}{n}}} = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{m}{n}},$$

also:

(20) $$A^c \cdot B^c = (AB)^c, \quad \frac{A^c}{B^c} = \left(\frac{A}{B}\right)^c.$$

Sodann gehen die beiden Gleichungen (15) durch Einführung jener Schreibweise in die folgende über:

$$A^{\frac{m}{n}} \cdot A^{\frac{m'}{n'}} = A^{\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}}, \quad \frac{A^{\frac{m}{n}}}{A^{\frac{m'}{n'}}} = A^{\frac{m}{n}-\frac{m'}{n'}},$$

also, wenn noch $\frac{m'}{n'} = c'$ gesetzt wird:

(21) $$A^c \cdot A^{c'} = A^{c+c'}, \quad \frac{A^c}{A^{c'}} = A^{c-c'}.$$

Ferner ergibt sich mit Benützung von Gl. (18), (12), (14):

$$\left(A^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{m'}{n'}} = \sqrt[n']{(\sqrt[n]{A^m})^{m'}} = \sqrt[n']{\sqrt[n]{A^{mm'}}} = \sqrt[nn']{A^{mm'}} = A^{\frac{mm'}{nn'}},$$

d. h.

(22) $$(A^c)^{c'} = A^{cc'}.$$

Ersetzt man in Ungl. (16) A, B durch A^m, B^m, so folgt:

$$A^{\frac{m}{n}} > B^{\frac{m}{n}}, \quad \text{wenn: } A^m > B^m, \quad \text{d. h. wenn: } \begin{cases} A > B, & m > 0, \\ A < B, & m < 0, \end{cases}$$

also:

(23) $$A^c > B^c, \quad \text{wenn: } \begin{cases} A > B, & c > 0, \\ A < B, & c < 0, \end{cases}$$

und speziell für $B = 1$ $\left(\text{wobei dann: } 1^c = 1^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{1})^m = 1\right)$:

(23a) $$A^c > 1, \quad \text{wenn: } \begin{cases} A > 1, & c > 0, \\ A < 1, & c < 0. \end{cases}$$

Schließlich gehen noch die Ungleichungen (17) für $\frac{m}{n} = c$, $\frac{m'}{n'} = c'$ in die folgenden über:

(24) $$A^c > A^{c'}, \quad \text{wenn: } \begin{cases} A > 1, & c > c', \\ A < 1, & c < c' \end{cases}$$

(die übrigens auch aus (23a) hätten gefolgert werden können, wenn man daselbst c durch $c - c'$ ersetzt und sodann die Ungleichung mit $A^{c'}$ multipliziert).

6. Durch die vorstehenden Betrachtungen ist nunmehr die Aufgabe gelöst, den (einzigen) *positiven* Wert einer *Potenz* mit *positiver Basis* und *beliebigem rationalen Exponenten* als *eindeutig bestimmte reelle Zahl* zu definieren und ihre vollkommene Analogie mit der gewöhnlichen *ganzen* Potenz nachzuweisen. Es liegt nun nahe, den Begriff der *Potenz* noch in der Weise zu erweitern, daß man statt der *rationalen Exponenten* c beliebige *reelle, durch rationale Zahlenfolgen definierte Exponenten* $C = [c_\nu] = \lim\limits_{\nu \to \infty} c_\nu$ zuläßt. Um dann vor allen Dingen A^C überhaupt zu *definieren*, hätte man nach Analogie der früher für die *rationalen* Rechnungsoperationen mit allgemeinen reellen Zahlen aufgestellten Definitionen zu setzen[1]):

$$A^{\lim\limits_{\nu \to \infty} c_\nu} = \lim_{\nu \to \infty} A^{c_\nu} \quad (\text{vgl. § 26, Gl. (9), S. 163}),$$

1) Bei Befolgung dieses Prinzips hätten wir schon $\sqrt[n]{A}$ $\left(= A^{\frac{1}{n}}\right)$, wo $A = [a_\nu] = \lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu$, nach Analogie von: $(\lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu)^m = \lim\limits_{\nu \to \infty} (a_\nu^m)$, durch die Formel:

(1) $$\sqrt[n]{A} = \lim_{\nu \to \infty} \sqrt[n]{a_\nu}$$

definieren können. Da sodann (die leicht zu beweisende Konvergenz der irratio-

und es würde sich dann zunächst darum handeln, die *Konvergenz* der aus wohldefinierten *reellen* Zahlen bestehenden Folge A^{c_ν} $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ festzustellen, sodann die für A^c geltenden Rechnungsregeln aus der obigen Definition abzuleiten. Hierzu bedürfen wir noch gewisser Formeln zur Abschätzung von Differenzen der Form $(A^c - B^c)$ und $(A^c - A^{c'})$, welche im folgenden Paragraphen entwickelt werden sollen.

§ 30. Abschätzungsformeln für Potenzen mit rationalem Exponenten.

1. Bedeutet P eine beliebige, von 1 verschiedene *positive*, n eine natürliche Zahl, so ist:

$$(1)\qquad \left.\begin{array}{c}\dfrac{P^n-1}{P-1}\\[2ex] \dfrac{1-P^n}{1-P}\end{array}\right\} = 1 + P + \cdots + P^{n-1} \left\{\begin{array}{ll} > n, & \text{wenn: } P > 1,\\[2ex] < n, & \text{wenn: } P < 1,\end{array}\right.$$

und daher für $P > 1$: $P^n - 1 > n(P-1)$,

„ $P < 1$: $1 - P^n < n(1-P)$, also: $P^n - 1 > n(P-1)$,

---

nalen Folge $(\sqrt[n]{a_\nu})$ vorausgesetzt) nach § 28, S. 171, letzte der Formeln (19):

$$(2)\qquad \left(\lim_{\nu\to\infty} \sqrt[n]{a_\nu}\right)^n = \lim_{\nu\to\infty}\left(\left(\sqrt[n]{a_\nu}\right)^n\right) = \lim_{\nu\to\infty} a_\nu = A,$$

so erscheint hiermit die Bezeichnung $\sqrt[n]{A}$ für die durch Gl. (1) *definierte* Zahl gerechtfertigt. Da sich indessen die *Existenz* von $\sqrt[n]{A}$, d. h. einer *bestimmten positiven reellen Zahl,* welche der Gleichung $x^n = A$ genügt, mit den nämlichen Mitteln ganz direkt nachweisen ließ, wie diejenige von $\sqrt[n]{a}$ bei positivem *rationalen* a, und sodann alle die weiteren Beziehungen, denen $\sqrt[n]{A} = A^{\frac{1}{n}}$ und $A^c = A^{\frac{m}{n}}$ genügen, gleich für den allgemeinen Fall einer *beliebigen reellen* (sc. positiven) Basis unmittelbar angeknüpft werden konnten, so erschien es zur Vermeidung unnötiger Wiederholungen *zweckmäßig,* statt des soeben angedeuteten wohl näher liegenden Weges den im Texte angegebenen einzuschlagen. Daß übrigens die im Texte benützte Definition von $\sqrt[n]{A}$ zu *demselben* Resultate führt, wie die oben unter Gl. (1) gegebene, d. h. daß allemal:

$$\lim_{\nu\to\infty} \sqrt[n]{a_\nu} = \sqrt[n]{A},$$

wenn $\sqrt[n]{A}$ die nunmehr bereits *vollkommen definierte* reelle Zahl bedeutet, folgt mit Berücksichtigung von Gl. (2) unmittelbar aus der am Schlusse von § 29, Nr. 3 (S. 174) gemachten Bemerkung, daß es *nur eine* positive Lösung der Gleichung $x^n = A$ gibt.

sodaß also in *jedem* Falle für $P > 0$ (nur exkl. $P = 1$) die Beziehung[1]) besteht:

(2) $$P^n > 1 + n(P-1).$$

Ersetzt man hier P durch $P^{-\frac{1}{n}}$ (wo: $0 < P^{-\frac{1}{n}} < 1$ oder $P^{-\frac{1}{n}} > 1$, d. h. wieder nur: $P > 0$ und von 1 verschieden), so folgt:

$$P^{-1} > 1 + n\left(P^{-\frac{1}{n}} - 1\right),$$

also:

(3) $$P^{-\frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n}(P^{-1} - 1) = 1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{P-1}{P}.$$

Man bemerke zunächst, daß die rechte Seite dieser Ungleichung stets wesentlich *positiv* ist[2]), da sie ja *über* der positiven Zahl $P^{-\frac{1}{n}}$ liegt. Somit ergibt sich durch Übergang zu den reziproken Werten:

(4) $$P^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{P-1}{P}}.$$

Bedeutet nun K eine *positive* oder *negative* Zahl, die *numerisch* kleiner als 1 ist, so hat man:

(5) $$1 > 1 - K^2 = (1-K)(1+K), \quad \text{also:} \quad \frac{1}{1-K} > 1 + K.$$

Wird also vorläufig angenommen, daß $\frac{1}{n} \cdot \left|\frac{P-1}{P}\right| < 1$, so folgt auf Grund der letzten Ungleichung aus (4) *a fortiori:*

(6) $$P^{\frac{1}{n}} > 1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{P-1}{P},$$

1) Die in § 14 (s. Ungl. (15), S. 82) gegebene Herleitung der nämlichen Beziehung erstreckte sich nur auf den Fall $P > 1$.

2) Man erkennt dies auch direkt aus der Form des Ausdruckes:

$$1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{P-1}{P}.$$

Ist nämlich $P > 1$, so ist:

$$0 < \frac{1}{n} \cdot \frac{P-1}{P} < \frac{1}{n};$$

ist dagegen $P < 1$, so wird:

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{P-1}{P} < 0,$$

also in beiden Fällen der fragliche Ausdruck *positiv*.

und hieraus durch die Erhebung in die m^{te} Potenz, mit Benützung von Ungl. (2):

$$(7) \qquad P^{\frac{m}{n}} > 1 + \frac{m}{n} \cdot \frac{P-1}{P}.$$

Dabei kann man aber die oben gemachte Nebenbedingung:

$$\frac{1}{n} \cdot \left| \frac{P-1}{P} \right| < 1$$

schließlich wieder fallen lassen. Dieselbe ist nämlich allemal *von selbst* erfüllt, wenn $P > 1$. Ist dagegen $P < 1$, so wird $P - 1$, also auch $\frac{m}{n} \cdot \frac{P-1}{P}$ *negativ*, und daher, wenn $\frac{1}{n} \cdot \left| \frac{P-1}{P} \right| \geqq 1$ sein sollte, die *rechte* Seite von Ungl. (6), (7) *negativ*, allenfalls *Null*.

In diesem Falle sagen also jene Ungleichungen etwas zwar *triviales*, aber immerhin *richtiges* aus. Man hat somit, wenn man noch in Ungl. (6) bzw. (7) $\frac{1}{n} = c$ bzw. $\frac{m}{n} = c$ setzt:

$$(\text{Ia}) \qquad P^c > 1 + c \cdot \frac{P-1}{P} \quad \text{für jedes } \textit{rationale } c > 0,$$

ohne jede weitere Einschränkung, als daß P *positiv und von* 1 *verschieden*[1]) anzunehmen ist (während freilich die praktische Brauchbarkeit dieser Formel erst beginnt, wenn: $c \cdot \frac{P-1}{P} > -1$, d. h. $P > \frac{c}{c+1}$).

Aus (Ia) lassen sich zwei *wirksamere* Ungleichungen (d. h. solche, die eine *höhere* untere Schranke für P^c liefern) herleiten, wenn man die beiden Fälle $c > 1$ und $c < 1$ besonders behandelt.

Ist zunächst $c > 1$, also $c - 1 > 0$, so hat man auf Grund von (Ia):

$$P^{c-1} > 1 + (c-1) \cdot \frac{P-1}{P}$$

und hieraus durch Multiplikation mit P:

$$(\text{Ib}) \qquad P^c > P + (c-1)(P-1) = 1 + c(P-1) \quad (c > 1).^{2})$$

---

1) Für $P = 1$ tritt an die Stelle dieser *Ungleichung* die *Gleichung*:

$$1^c = 1.$$

2) Diese Beziehung liefert in der Tat eine Verschärfung von Ungl. (Ia), d. h. man hat stets:

$$1 + c \cdot (P-1) > 1 + c \cdot \frac{P-1}{P},$$

also:

$$P - 1 > \frac{P-1}{P}.$$

Dies leuchtet unmittelbar ein, wenn $P > 1$. Ist nun aber $P < 1$, so ist:

2 Um eine entsprechende Beziehung für den Fall $c < 1$ zu gewinnen, substituieren wir in der letzten Formel $\frac{1}{c}$ für c, sodaß also, wenn man noch Q an Stelle von P schreibt, sich ergibt:

$$Q^{\frac{1}{c}} > 1 + \frac{1}{c}(Q-1) \quad \left(\text{falls: } \frac{1}{c} > 1, \text{ also: } c < 1\right).$$

Setzt man jetzt $Q^{\frac{1}{c}} = \frac{1}{P}$, wo offenbar P wiederum nur der Bedingung zu genügen hat, *positiv* und $\gtrless 1$ zu sein, so folgt:

$$\frac{1}{P} > 1 + \frac{1}{c}\left(\frac{1}{P^c} - 1\right)$$

und, wenn man diese Ungleichung nach $\frac{1}{P^c}$ auflöst:

$$\frac{1}{P^c} < 1 + c\left(\frac{1}{P} - 1\right) = 1 - c \cdot \frac{P-1}{P},$$

also, durch Übergang zu den reziproken Werten:

$$\text{(Ic)} \qquad P^c > \frac{1}{1 - c \cdot \frac{P-1}{P}} = 1 + c \cdot \frac{P-1}{P - c(P-1)} \quad (0 < c < 1).^{1)}$$

Es bestehen somit zur Abschätzung von P^c (für jedes $P > 0$, exkl.

$$P - 1 < 0, \quad \frac{P-1}{P} < 0$$

und:

$$|P-1| < \frac{|P-1|}{P},$$

also:

$$P - 1 > \frac{P-1}{P}.$$

1) Auch hier ist (wenn man die Wirkung dieser Formel mit derjenigen von (I a) vergleichen will):

$$\frac{1}{1 - c \cdot \frac{P-1}{P}} > 1 + c \cdot \frac{P-1}{P}.$$

Dies folgt aus Ungl. (5), sofern $c \cdot \left|\frac{P-1}{P}\right| < 1$. Ist dagegen $c \cdot \left|\frac{P-1}{P}\right| \geq 1$, was nur dann eintreten kann, wenn $P < 1$ ist, so wird $c \cdot \frac{P-1}{P} \leq -1$, also die *rechte* Seite der obigen Ungleichung *negativ* oder *Null*, während die *linke* stets *positiv* bleibt.

$P = 1$) die drei Beziehungen (Ia)—(Ic), die wir der besseren Übersicht halber nochmals zusammenstellen:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \text{(a)} & \\ \text{(b)} & P^c > \\ \text{(c)} & \end{cases} \begin{cases} 1 + c \cdot \dfrac{P-1}{P} & (c > 0) \\ 1 + c \cdot (P-1) & (c > 1) \\ \dfrac{1}{1 - c \cdot \dfrac{P-1}{P}} = 1 + c \cdot \dfrac{P-1}{P - c(P-1)} & (0 < c < 1). \end{cases}$$

Um auch eine *obere* Schranke für P^c zu erhalten, bilden wir aus diesen Ungleichungen durch Substitution von $\frac{1}{P}$ für P zunächst die folgenden:

$$\text{(8)} \quad \begin{cases} \text{(a)} & \\ \text{(b)} & \left(\frac{1}{P}\right)^c > \\ \text{(c)} & \end{cases} \begin{cases} 1 - c(P-1) & (c > 0) \\ 1 - c \cdot \dfrac{P-1}{P} & (c > 1) \\ \dfrac{1}{1 + c(P-1)} & (0 < c < 1).^{1)} \end{cases}$$

Die rechte Seite von Ungl. (a) ist *positiv*, wenn $P < 1 + \frac{1}{c}$; diejenige von Ungl. (b), wenn $P < \frac{c}{c-1}$; diejenige von Ungl. (c) in jedem Falle

---

1) Die Beziehungen (8) liefern zugleich auch eine *untere* Schranke für P^c im Falle $c < 0$. Man hat zunächst $\left(\frac{1}{P}\right)^c = P^{-c}$, und wenn man sodann durchweg $-c$ an Stelle von c schreibt und dafür $c < 0$ annimmt, so findet man:

$$\text{(I')} \quad \begin{cases} \text{(a)} & \\ \text{(b)} & P^c > \\ \text{(c)} & \end{cases} \begin{cases} 1 + c \cdot (P-1) & (c < 0) \\ 1 + c \cdot \dfrac{P-1}{P} & (c < -1) \\ \dfrac{1}{1 - c(P-1)} = 1 + c \cdot \dfrac{P-1}{1 - c(P-1)} & (-1 < c < 0). \end{cases}$$

Um auch hier eine *obere* Schranke zu erhalten, braucht man nur bei den Ungleichungen (I) unter der Voraussetzung, daß durch geeignete Einschränkung von P die rechten Seiten durchweg *positiv* bleiben, zu den reziproken Werten überzugehen und schließlich wieder c durch $-c$ zu ersetzen. Alsdann ergibt sich:

$$\text{(II')} \quad \begin{cases} \text{(a)} & \\ \text{(b)} & P^c < \\ \text{(c)} & \end{cases} \begin{cases} \dfrac{1}{1 - c \cdot \dfrac{P-1}{P}} = 1 + c \cdot \dfrac{P-1}{P - c(P-1)} & \left(c < 0,\ P > \dfrac{c}{c-1}\right) \\ \dfrac{1}{1 - c \cdot (P-1)} = 1 + c \cdot \dfrac{P-1}{1 - c(P-1)} & \left(c < -1,\ P > 1 + \dfrac{1}{c}\right) \\ 1 + c \cdot \dfrac{P-1}{P} & (-1 < c < 0). \end{cases}$$

(wegen $c < 1$, $P > 0$). Somit ergibt sich durch Übergang zu den reziproken Werten:

$$\text{(II)} \begin{cases} \text{(a)} & \\ \text{(b)}\ P^c < & \\ \text{(c)} & \end{cases} \begin{cases} \dfrac{1}{1-c(P-1)} = 1 + c\cdot\dfrac{P-1}{1-c(P-1)} & \left(c>0,\ P<1+\dfrac{1}{c}\right) \\ \dfrac{1}{1-c\cdot\dfrac{P-1}{P}} = 1+c\cdot\dfrac{P-1}{P-c(P-1)} & \left(c>1,\ P<\dfrac{c}{c-1}\right) \\ 1+c\cdot(P-1) & (0<c<1). \end{cases}$$

3. Für das folgende erweisen sich die Beziehungen (Ib) und (IIc), also:

$$\text{(Ib)} \qquad P^c > 1 + c(P-1) \quad (c>1),$$

$$\text{(IIc)} \qquad P^c < 1 + c(P-1) \quad (0<c<1),$$

als vollkommen ausreichend.[1]) Substituiert man zunächst in (Ib): $P = \frac{A}{B}$ (wo die Zahlen A, B keiner weiteren Bedingung zu genügen haben, als *positiv* und voneinander *verschieden* zu sein), so folgt zunächst:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^c > 1 + c\cdot\frac{A-B}{B},$$

also, nach Multiplikation mit B^c:

$$\text{(9)} \qquad A^c - B^c > c\cdot B^{c-1}(A-B) \quad (c>1).$$

Um zunächst eine analoge Beziehung für *negative* $c < -1$ zu erhalten, ersetzen wir A, B durch A^{-1}, B^{-1} und schreiben vorläufig c' statt c, sodaß sich also ergibt:

$$A^{-c'} - B^{-c'} > c'\cdot B^{1-c'}(A^{-1}-B^{-1}) = c'\cdot A^{-1}\cdot B^{-c'}(B-A) \quad (c'>1).$$

Ist nun $A < B$, also $\frac{A}{B} < 1$, so ist die rechte Seite dieser Ungleichung wesentlich *positiv* und die Ungleichung bleibt also *a fortiori* bestehen, wenn man jene rechte Seite mit $\frac{A}{B}$ multipliziert; ist andererseits $A > B$, also die rechte Seite wesentlich *negativ*, so bringt deren Multiplikation

1) Ich bemerke deshalb ausdrücklich, daß man, die in Nr. 2 lediglich einer gewissen Vollständigkeit zuliebe gegebenen Entwicklungen beiseite lassend, die Formel (IIc) auch ganz unmittelbar aus (Ib) herleiten kann, *ohne* den Weg über (Ic) und (8c) zu nehmen. Schreibt man nämlich in (Ib) $\frac{1}{c}$ statt c, so wird:

$$P^{\frac{1}{c}} > 1 + \frac{1}{c}(P-1) \quad (0<c<1),$$

und, wenn man sodann P^c für P substituiert:

$$P > 1 + \frac{1}{c}(P^c - 1),$$

also in der Tat:

$$P^c < 1 + c(P-1) \quad (0<c<1).$$

mit $\frac{A}{B} > 1$ gleichfalls eine Verkleinerung hervor. Man erhält auf diese Weise in *jedem* Falle:

$$A^{-c'} - B^{-c'} > c' \cdot B^{-c'-1}(B-A) \quad (c' > 1),$$

und wenn man schließlich noch $c' = -c$ setzt:

(9a) $$A^c - B^c > c \cdot B^{c-1}(A-B) \quad (c < -1),$$

d. h. die Beziehung (9) gilt unverändert auch für $c < -1$, also allgemein für $|c| > 1$.

Zur Herstellung einer entsprechenden Beziehung für $|c| < 1$ setzen wir in (IIc) $P = \frac{B}{A}$ und finden zunächst:

$$B^c - A^c < c \cdot A^{c-1}(B-A),$$

also durch Multiplikation mit -1:

(10) $$A^c - B^c > c \cdot A^{c-1}(A-B) \quad (0 < c < 1).$$

Ersetzen wir auch hier wieder A, B durch A^{-1}, B^{-1} und schreiben c' für c, so folgt:

$$A^{-c'} - B^{-c'} > c' \cdot A^{1-c'}(A^{-1} - B^{-1}) = c' \cdot A^{-c'} \cdot B^{-1}(B-A) \quad (0 < c' < 1).$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung wird aber wiederum noch *verkleinert*, wenn man sie mit $\left(\frac{A}{B}\right)^{c'}$ (wo: $\left(\frac{A}{B}\right)^{c'} < 1$, wenn $A < B$ usw.) multipliziert, sodaß also:

$$A^{-c'} - B^{-c'} > c' \cdot B^{-c'-1}(B-A)$$

und, wenn man wieder noch $c' = -c$ setzt:

(10a) $$A^c - B^c > c \cdot B^{c-1}(A-B) \quad (-1 < c < 0).$$

Man bemerke, daß diese Ungleichung *nicht* dieselbe Form hat, wie die Ungl. (10), aus welcher sie hervorgegangen, vielmehr genau mit (9), (9a) übereinstimmt. Da sie im übrigen, wie man sich leicht unmittelbar überzeugt, auch noch für $c = -1$ richtig bleibt[1]), so *gilt schließlich Ungl.* (9), außer für $c > 1$, *auch für alle* $c < 0$.

---

1) Sie nimmt für $c = -1$ die Form an:

$$A^{-1} - B^{-1} > B^{-2}(B-A).$$

Nun ist für alle positiven, voneinander verschiedenen A, B:

$$(B-A)^2 > 0,$$

also:

$$B(B-A) > A(B-A),$$

woraus durch Division mit AB^2 sofort die Richtigkeit der obigen Ungleichung resultiert.

Um zu der *unteren* Schranke, welche durch Ungl. (9), (10) für $A^c - B^c$ geliefert wird, eine entsprechende *obere* zu gewinnen, braucht man daselbst nur A und B gegenseitig zu vertauschen. Alsdann ergibt sich, wenn man noch durch Multiplikation mit (-1) das Zeichen $>$ in $<$ überführt:

$$(11)\qquad A^c - B^c < c \cdot A^{c-1}(A-B) \quad (c<0 \text{ und } c>1),$$

$$(12)\qquad A^c - B^c < c \cdot B^{c-1}(A-B) \quad (0<c<1).$$

Die Beziehungen (9)—(12) lassen sich dann schließlich in folgender Art übersichtlich zusammenfassen:

$$(\text{III})\qquad c \cdot B^{c-1}(A-B)\begin{Bmatrix} < \\ > \end{Bmatrix} A^c - B^c \begin{Bmatrix} < \\ > \end{Bmatrix} c \cdot A^{c-1}(A-B)\begin{cases} (c<0 \text{ und } c>1) \\ (0<c<1) \end{cases}$$

und es sei nochmals darauf aufmerksam gemacht, daß dabei A, B lediglich als *positiv* und voneinander *verschieden* vorausgesetzt werden, d. h. sie gelten ebenso für $A > B > 0$, wie für $B > A > 0$.[1])

4. Für den *absoluten Betrag* von $A^c - B^c$, wo c eine beliebige, von Null verschiedene rationale Zahl bedeutet, ergibt sich aus (III) offenbar eine Relation von der Form:

$$(13)\qquad |A^c - B^c| < |c| \cdot M \cdot |A - B|,$$

wo M die *größere* der beiden Zahlen A^{c-1}, B^{c-1} bedeutet. Um dies durch eine passende Bezeichnungsweise zum unmittelbaren Ausdruck zu bringen, werde zunächst $c > 1$, also $c - 1 > 0$ angenommen. Ist sodann G die größere der beiden Zahlen A und B, also:

$$A \leqq G, \quad B \leqq G,$$

so folgt (s. Ungl. (23) des vorigen Paragraphen):

$$A^{c-1} \leqq G^{c-1}, \quad B^{c-1} \leqq G^{c-1}, \quad \text{also:} \quad M = G^{c-1}.$$

Ist dagegen $c < 1$, also $c - 1 < 0$, und hat man andererseits:

$$A \geqq g > 0, \quad B \geqq g,$$

so folgt analog:

$$A^{c-1} \leqq g^{c-1}, \quad B^{c-1} \leqq g^{c-1}, \quad \text{also:} \quad M = g^{c-1}.$$

Hiernach läßt sich also Ungl. (13) etwas ausführlicher folgendermaßen schreiben:

$$(14)\qquad |A^c - B^c| < \begin{cases} |c| \cdot G^{c-1} \cdot |A-B|, \text{ wenn: } c>1,\ 0<\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \leqq G, \\ |c| \cdot g^{c-1} \cdot |A-B|, \quad " \quad c<1,\ 0< g \leqq \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}. \end{cases}$$

---

1) Für $A = B$, sowie in dem gleichfalls ausgeschlossenen Falle $c = 0$ tritt an die Stelle von Ungl. (III) die Identität: $0 = 0 = 0$; ferner im Falle $c = 1$ die Identität:

$$A - B = A - B = A - B.$$

Daraus folgt insbesondere, daß $|A^c - B^c|$ *gleichzeitig mit* $|A - B|$ *beliebig klein* wird, sofern nur A, B innerhalb irgendwelcher *positiver* Schranken bleiben.

5. Setzt man in Ungl. (13) speziell $B = 1$ (also $A \gtrless 1$), so ergibt sich:

(15) $$|A^c - 1| < |c| \cdot M \cdot |A - 1|,$$

wo jetzt M die *größere* der beiden Zahlen A^{c-1} und 1 bezeichnet; d. h. man hat:

(16) $$\begin{cases} M = 1, & \text{wenn: } (A < 1,\ c > 1) \text{ oder: } (A > 1,\ c < 1), \\ M = A^{c-1}, & \text{wenn: } (A > 1,\ c > 1) \text{ oder: } (A < 1,\ c < 1). \end{cases}$$

Ersetzt man in Ungl. (15) c durch $c - c'$ und multipliziert die betreffende Ungleichung noch mit $A^{c'}$, so ergibt sich zunächst:

$$|A^c - A^{c'}| < |c - c'| \cdot M \cdot A^{c'} \cdot |A - 1|,$$

wo M die *größere* der beiden Zahlen $A^{c-c'-1}$ und 1 bedeutet. Setzt man also noch: $M \cdot A^{c'} = M'$, so wird:

(17) $$|A^c - A^{c'}| < |c - c'| \cdot M' \cdot |A - 1|,$$

wo jetzt M' die *größere* der beiden Zahlen A^{c-1} und $A^{c'}$ vorstellt.[1])

Aus den Ungleichungen (15) und (17) erkennt man insbesondere, daß $|A^c - 1|$ bzw. $|A^c - A^{c'}|$ für jedes von 1 verschiedene, innerhalb irgendwelcher *positiver* Schranken liegende A *gleichzeitig mit* $|c|$ bzw. $|c - c'|$ *beliebig klein* werden. (In dem hierbei ausgenommenen Falle $A = 1$ hat man offenbar $|A^c - 1| = |A^c - A^{c'}| = 0$ für *jedes beliebige* c, c'.)

§ 31. Potenzen mit positiver Basis und beliebigem reellen Exponenten.

1. Es bedeute zunächst $A = [a_\nu]$ eine *beliebige positive*, c eine *rationale* Zahl mit beliebigem Vorzeichen. Die Folge (a_ν^c) ist dann sicher *konvergent*. Denn wegen der Konvergenz der Folge $[a_\nu]$ gegen einen *positiven* Grenzwert bleiben für $\nu \geqq n$ die Zahlen a_ν *zwischen zwei positiven Schranken* g, G[2]), während zugleich $|a_{\nu+\varrho} - a_\nu|$ schließlich *beliebig*

1) Da bei Vertauschung von c und c' die linke Seite von Ungl. (17), desgleichen rechts die Faktoren $|c - c'|$ und $|A - 1|$ ungeändert bleiben, so steht es auch frei, unter M' die größere der beiden Zahlen A^c und $A^{c'-1}$ zu verstehen.

2) Damit die Terme a_ν^c überhaupt bestimmte positive reelle Zahlen vorstellen, ist an sich erforderlich, daß $a_\nu > 0$. Diese Bedingung ist, wegen $\lim_{\nu \to \infty} a_\nu > 0$, sicher für $\nu \geqq n$ erfüllt. Sollte die Folge $[a_\nu]$ eine (hiernach allemal *endliche*) Anzahl *negativer* Terme enthalten, so hat man dieselben bei der Bildung der Folge a_ν^c einfach wegzulassen.

klein wird; dann gilt aber das letztere nach Ungl. (14) des vorigen Paragraphen auch für $|a_{\nu+\varrho}^c - a_\nu^c|$. Man kann daher setzen:

(1) $$\lim_{\nu\to\infty} a_\nu^c = B,$$

wo B eine bestimmte nicht negative Zahl vorstellt. Ist dann etwa $c = \pm\frac{m}{n}$, so folgt:

(2) $$B^n = \left(\lim_{\nu\to\infty} a_\nu^{\pm\frac{m}{n}}\right)^n = \lim_{\nu\to\infty} a_\nu^{\pm m} \quad \text{(nach (19), S. 171; (22), S. 177)}$$

$$= (\lim_{\nu\to\infty} a_\nu)^{\pm m} \quad \text{(nach (8), S. 163)}$$

$$= A^{\pm m} = \left(A^{\pm\frac{m}{n}}\right)^n,$$

und daher:

(3) $$B = A^{\pm\frac{m}{n}} = A^c,$$

d. h. schließlich:

(4) $$\lim_{\nu\to\infty} a_\nu^c = A^c,$$

wo A^c die § 29, Nr. 5 (S. 176) eindeutig definierte positive reelle Zahl vorstellt. Man hätte daher auch *umgekehrt* A^c als $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu^c$ *definieren* können (vgl. die Fußnote am Ende von § 29, S. 177).

Ist $[a_\nu]$ eine positive Folge mit dem Grenzwerte 0, so wird für $c > 0$ auch:

(5) $$\lim_{\nu\to\infty} a_\nu^c = 0.$$

Dies ist ohne weiteres klar, falls $c > 1$ (da — zum mindesten für $\nu \geqq n$ — $a_\nu < 1$, somit nach S. 177, Ungl. (24): $a_\nu^c < a_\nu$) und kann im Falle $0 < c = \frac{m}{n} < 1$ leicht indirekt bewiesen werden. Hätte man nämlich:

$$\lim_{\nu\to\infty} a_\nu^{\frac{m}{n}} = B > 0,$$

so würde sich ergeben:

$$\left(\lim_{\nu\to\infty} a_\nu^{\frac{m}{n}}\right)^n = \lim_{\nu\to\infty} a_\nu^m = B^n > 0,$$

was unmöglich ist, da gleichzeitig mit $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$ auch $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu^m = 0$.

Ist $a_\nu > 0$, $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$ und $c < 0$, so hat man zunächst nach Gl. (5):

$$\lim_{\nu\to\infty} a_\nu^{-c} = 0$$

und daher nach S. 165, Fußnote 1:

(6) $$\lim_{\nu\to\infty} a_\nu^c = +\infty.$$

2. Sei jetzt wiederum A eine beliebige *positive*, außerdem $C = [c_\nu]$ eine beliebige *reelle* Zahl. Alsdann ist die Folge (A^{c_ν}) allemal *konvergent*: denn $|A^{c_{\nu+\varrho}} - A^{c_\nu}|$ wird nach § 30, Ungl. (17) (S. 186) gleichzeitig mit $|c_{\nu+\varrho} - c_\nu|$, d. h. wegen der Konvergenz der Folge $[c_\nu]$, für hinlänglich große ν *beliebig klein*. Hiernach *existiert* also $\lim\limits_{\nu\to\infty} A^{c_\nu}$ als eine bestimmte nicht negative Zahl.

Ist zunächst die durch die rationale Folge $[c_\nu]$ definierte Zahl C eine *rationale*, so hat man offenbar:

$$\lim_{\nu\to\infty} A^{c_\nu} = A^C, \tag{7}$$

wo A^C eine wohldefinierte positive Zahl vorstellt (vgl. § 29, Nr. 5, S. 175 und Nr. 1 dieses Paragraphen). Denn für hinlänglich große ν wird $|C - c_\nu|$ und somit nach § 30, Ungl. (17) auch $|A^C - A^{c_\nu}|$ *beliebig klein*.

Ist jetzt $C = [c_\nu]$ *irrational*, so *definieren* wir A^C durch die Formel:

$$A^C = \lim_{\nu\to\infty} A^{c_\nu}.^{1)} \tag{8}$$

Alsdann steht auf Grund der eben gemachten Bemerkung zunächst fest, daß diese Definition *auf keinen Widerspruch* führt, falls an Stelle von C eine in der Gestalt $\lim\limits_{\nu\to\infty} c_\nu$ gegebene *rationale* Zahl tritt. Im übrigen läßt sich aber auch zeigen, daß das auf diese Weise definierte Symbol A^C den nämlichen Fundamentalbeziehungen genügt, wie A^c bei *rationalem* c.

Vor allem bemerke man, daß die *Zahl* A^C durch Gl. (8) vollkommen *eindeutig* definiert ist, daß sie also auch *nicht* von der besonderen Zahlenfolge $[c_\nu]$ abhängt, welche zur Definition von C verwendet wird. Ist nämlich $[c_\nu']$ irgendeine andere Zahlenfolge von der Beschaffenheit, daß $C = [c_\nu']$ und bedeutet (c_ν'') die zusammengesetzte Folge $(c_0, c_0', \cdots, c_\nu, c_\nu', \cdots)$, so *konvergiert* (c_ν''), also auch $(A^{c_\nu''})$, und man hat wiederum nach § 28, Nr. 3, I (S. 170):

$$\lim_{\nu\to\infty} A^{c_\nu''} = \lim_{\nu\to\infty} A^{c_\nu'} = \lim_{\nu\to\infty} A^{c_\nu}. \tag{9}$$

3. Wir wollen nun zunächst zeigen, daß A^C denjenigen Relationen genügt, welche den in § 29 mit (20)—(24) bezeichneten für A^c entsprechen. Es ist:

---

1) Hieraus folgt insbesondere:

$$1^C = 1,$$

da ja für jedes rationale c_ν:

$$1^{c_\nu} = 1.$$

$$A^C \cdot B^C = \lim_{\nu \to \infty} A^{c_\nu} \cdot \lim_{\nu \to \infty} B^{c_\nu}$$

$$= \lim_{\nu \to \infty} (A^{c_\nu} \cdot B^{c_\nu}) \quad (\S\ 28,\ \text{S. } 171,\ \text{Gl. } (20))$$

$$= \lim_{\nu \to \infty} (AB)^{c_\nu} \quad (\S\ 29,\ \text{S. } 176,\ \text{Gl. } (20)),$$

also schließlich mit Benützung der Definitionsgleichung (8):

(10a) $$A^C \cdot B^C = (AB)^C \quad \text{(genau konform mit Gl. (20), S. 176).}$$

In gleicher Weise findet man:

(10b) $$\frac{A^C}{B^C} = \left(\frac{A}{B}\right)^C,$$

und speziell:

(10c) $$\frac{1}{B^C} = \left(\frac{1}{B}\right)^C.$$

Bedeutet außer C auch $C' = [c_\nu']$ eine beliebige reelle Zahl, so hat man auf Grund der Definitionsgleichung (8):

$$A^C \cdot A^{C'} = \lim_{\nu \to \infty} A^{c_\nu} \cdot \lim_{\nu \to \infty} A^{c_\nu'} = \lim_{\nu \to \infty} A^{c_\nu + c_\nu'}$$

(nach § 28, S. 171, Gl. (20); § 29, S. 176, Gl. (21))

und daher — wegen $C + C' = [c_\nu + c_\nu']$:

(11a) $$A^C \cdot A^{C'} = A^{C+C'} \quad \text{(entsprechend S. 176, Gl. (21)).}$$

Ganz analog ergibt sich:

(11b) $$\frac{A^C}{A^{C'}} = A^{C-C'},$$

und speziell:

(11c) $$\frac{1}{A^{C'}} = A^{-C'}.$$

Es sei jetzt $A > 1$, $C = [c_\nu] > 0$. Dann kann man (auf unendlich viele Weisen) eine positive *rationale* Zahl c so wählen, daß $C > c > 0$, also auch, zum mindesten für $\nu \geqq n$, $c_\nu > c > 0$. Alsdann hat man (nach S. 177, Ungl. (24), (23a)):

$$A^{c_\nu} > A^c > 1 \quad (\nu \geqq n)$$

und daher:

$$A^C \geqq A^c > 1.$$

Ersetzt man sodann A durch $\frac{1}{A}$, und C durch $-C$, wobei an die Stelle der Bedingungen $A > 1$, $C > 0$ die folgenden treten: $A < 1$, $C < 0$,

so ergibt sich mit Benützung von (10c), (11c) und durch Zusammenfassung mit den eben gefundenen Relationen die folgende:

$$(12)\qquad A^C > 1, \quad \text{wenn:} \begin{cases} A > 1, & C > 0 \\ 0 < A < 1, & C < 0 \end{cases}$$

(entsprechend S. 177, Ungl. (23a)).

Wird jetzt $\frac{A}{B}$ für A substituiert, so folgt durch Multiplikation mit B^C und Benützung von Gl. (11a):

$$(13)\qquad A^C > B^C, \quad \text{wenn:} \begin{cases} A > B > 0, & C > 0 \\ 0 < A < B, & C < 0 \end{cases}$$

(entsprechend S. 177, Ungl. (23)).

Und wenn man in (12) C durch $C - C'$ ersetzt und die ganze Ungleichung unter Anwendung von (11a) mit $A^{C'}$ multipliziert:

$$(14)\qquad A^C > A^{C'}, \quad \text{wenn:} \begin{cases} A > 1, & C > C' \\ 0 < A < 1, & C < C' \end{cases}$$

(entsprechend S. 177, Ungl. (24)).

Daraus folgt noch, daß man aus:

$$(15)\qquad A^C = B^C \quad \text{bzw.} \quad A^C = A^{C'}$$

allemal schließen darf:

$$(16)\qquad A = B \quad \text{bzw.} \quad C = C'.$$

Sind m, n zwei positive ganze Zahlen, so hat man:

$$(17)\qquad (A^C)^{\pm m} = (\lim_{\nu \to \infty} A^{c_\nu})^{\pm m} = \lim_{\nu \to \infty} A^{\pm c_\nu m} = A^{\pm Cm}.$$

Andererseits:

$$A^C = \lim_{\nu \to \infty} \left(A^{\frac{c_\nu}{n}}\right)^n = \left(\lim_{\nu \to \infty} A^{\frac{c_\nu}{n}}\right)^n = \left(A^{\frac{C}{n}}\right)^n,$$

also:

$$(A^C)^{\frac{1}{n}} = A^{\frac{C}{n}}.$$

Hieraus durch Erhebung in die $\pm m^{\text{te}}$ Potenz und Benützung von Gl. (17):

$$(A^C)^{\pm \frac{m}{n}} = A^{\pm \frac{C}{n} \cdot m} = A^{\pm C \cdot \frac{m}{n}},$$

und, wenn man noch $\pm \frac{m}{n} = c'$ setzt, sodaß also c' (positiv oder negativ) *rational:*

$$(18)\qquad (A^C)^{c'} = A^{Cc'}.$$

Ist jetzt wiederum $C' = [c_\nu']$, so ergibt sich nach Definitionsgleichung (8) mit Benützung von (18):

$$(A^C)^{C'} = \lim_{\nu \to \infty} (A^C)^{c_\nu'} = \lim_{\nu \to \infty} A^{Cc_\nu'},$$

und hieraus würde folgen:

(19) $$(A^C)^{C'} = A^{CC'} \quad \text{(entsprechend S. 177, Gl. (22))},$$

wenn noch gezeigt wird, daß:

(20) $$\lim_{\nu \to \infty} A^{Cc_\nu} = A^{\lim\limits_{\nu \to \infty} Cc_\nu'}$$

4. Es handelt sich also lediglich noch um den Nachweis des folgenden Satzes:

> Ist $C = \lim\limits_{\nu \to \infty} C_\nu$, wo (C_ν) eine Folge mit *beliebigen reellen* Gliedern bedeutet, so hat man:
>
> (21) $$\lim_{\nu \to \infty} A^{C_\nu} = A^C \quad \left(\text{d. h. also: } \lim_{\nu \to \infty} A^{C_\nu} = A^{\lim\limits_{\nu \to \infty} C_\nu}\right)$$
>
> (wobei jetzt die einzelnen Glieder der Folge (A^{C_ν}), ebenso wie A^C durch Gleichungen von der Form (8) definiert zu denken sind).

Beweis. Es bedeute (δ_ν) eine Folge positiver rationaler Brüche mit dem Grenzwerte *Null*. Alsdann wähle man zwei Folgen *rationaler* Zahlen c_ν, c_ν', sodaß:

(22) $$C_\nu - \delta_\nu < c_\nu < C_\nu, \quad C_\nu < c_\nu' < C_\nu + \delta_\nu.$$

Daraus folgt zunächst (wegen $\lim \delta_\nu = 0$):

$$C = \lim_{\nu \to \infty} c_\nu = \lim_{\nu \to \infty} c_\nu',$$

und daher:

(23) $$A^C = \lim_{\nu \to \infty} A^{c_\nu} = \lim_{\nu \to \infty} A^{c_\nu'}.$$

Andererseits folgt aus (22) mit Benützung der Ungl. (14), daß A^{C_ν} beständig eingeschlossen ist in die Grenzen A^{c_ν} und $A^{c_\nu'}$. Mithin ergibt sich mit Berücksichtigung von (23) nach § 28, Gl. (25) (S. 172):

$$\lim_{\nu \to \infty} A^{C_\nu} = A^C, \quad \text{q. e. d.} -$$

Damit ist also insbesondere die Richtigkeit von Gl. (20), und folglich auch diejenige von Gl. (19) vollständig bewiesen.

Als spezieller Fall des eben bewiesenen Satzes ergibt sich noch:

> Ist (Δ_ν) eine beliebige reelle Folge mit dem Grenzwerte *Null*, so hat man:
>
> (24) $$\lim_{\nu = \infty} A^{\Delta_\nu} = A^0 = 1,$$
>
> d. h. es wird $|A^{\Delta_\nu} - 1|$ gleichzeitig mit Δ_ν beliebig klein.

5. Es erscheint wünschenswert, auch die Abschätzungsformeln des vorigen Paragraphen auf den Fall eines *beliebigen reellen* Exponenten C auszudehnen. Dabei kommt es offenbar im wesentlichen nur darauf an, die dort mit (Ia) bezeichnete Grundformel:

$$P^c > 1 + c \cdot \frac{P-1}{P} \quad (c > 0)$$

auf P^C zu übertragen: denn alle weiteren a. a. O. hergeleiteten Beziehungen gehen aus der eben genannten lediglich durch Anwendung von Operationen hervor, welche nach Nr. 3 dieses Paragraphen für *beliebige reelle* Exponenten in ganz gleicher Weise ausführbar sind, wie für *rationale*.

Sei nun $C = [c_\nu] > 0$, also (zum mindesten für $\nu \geqq n$) auch $c_\nu > 0$ und daher:

$$P^{c_\nu} > 1 + c_\nu \cdot \frac{P-1}{P},$$

woraus zunächst für $P^C = \lim_{\nu \to \infty} P^{c_\nu}$ folgen würde:

$$P^C \geqq 1 + C \cdot \frac{P-1}{P}.$$

Es läßt sich aber leicht zeigen, daß das *Gleichheitszeichen* (abgesehen von dem ein für allemal ausgeschiedenen Falle $P = 1$) in Wahrheit *ausgeschlossen* erscheint. Dies ist ohne weiteres klar, wenn die rechte Seite *negativ* ausfallen sollte. Ist sie aber *positiv*, so gilt offenbar das gleiche von dem Ausdrucke $1 + \frac{C}{2} \cdot \frac{P-1}{P}$. Man hätte sodann:

$$P^{\frac{C}{2}} \geqq 1 + \frac{C}{2} \cdot \frac{P-1}{P} > 0,$$

und hieraus durch Quadraterhebung:

$$P^C \geqq 1 + C \cdot \frac{P-1}{P} + \frac{C^2}{4} \cdot \left(\frac{P-1}{P}\right)^2,$$

also schließlich:

$$\text{(Ia)} \qquad P^C > 1 + C \cdot \frac{P-1}{P} \quad (C > 0).$$

Daraus ergibt sich dann auf Grund der oben gemachten Bemerkung ohne weiteres auch die Gültigkeit der übrigen Abschätzungsformeln des vorigen Paragraphen, wenn man darin c durch C ersetzt.[1]) Man hat also insbesondere (nach Analogie von (Ib), (IIc) und (III)):

$$\text{(Ib)} \qquad P^C > 1 + C(P-1) \quad (C > 1),$$

$$\text{(II)} \qquad P^C < 1 + C(P-1) \quad (0 < C < 1),$$

$$\text{(III)} \quad C \cdot B^{C-1}(A-B) \begin{Bmatrix} < \\ > \end{Bmatrix} A^C - B^C \begin{Bmatrix} < \\ > \end{Bmatrix} C \cdot A^{C-1}(A-B) \begin{cases} (C<0 \text{ und } C>1) \\ (0<C<1). \end{cases}$$

1) Setzt man $P = 1 + Q$, wo also: $Q > 0$ oder: $-1 < Q < 0$ sein muß (damit

6. Benützt man wieder die letzte Formel zur Abschätzung von $|A^C - B^C|$, so erkennt man unmittelbar, daß $|A^C - B^C|$ *gleichzeitig mit* $|A - B|$ *beliebig klein* wird, sofern A und B innerhalb irgendwelcher *positiver* Schranken liegen.

Hieran knüpfen wir noch die folgende prinzipiell wichtige Bemerkung.

Ist $A = \lim_{\nu \to \infty} A_\nu$, so ergibt sich aus dem eben gesagten, daß $|A^C - A_\nu{}^C|$ gleichzeitig mit $|A - A_\nu|$ beliebig klein wird, und man hat daher:

(25) $$A^C = \lim_{\nu \to \infty} A_\nu{}^C \quad \text{(anders geschrieben: } (\lim_{\nu \to \infty} A_\nu)^C = \lim_{\nu \to \infty} (A_\nu{}^C)\text{)}.$$

Ist ferner $C = \lim_{\nu = \infty} C_\nu$, so hat man nach Gl. (21):

(26) $$A^C = \lim_{\nu \to \infty} A^{C_\nu} \quad \text{(also: } A^{\lim_{\nu \to \infty} C_\nu} = \lim_{\nu \to \infty} (A^{C_\nu})\text{)}.$$

Es besteht nun aber auch noch die folgende Beziehung:

(27) $$A^C = \lim_{\nu \to \infty} A_\nu{}^{C_\nu} \quad \text{(also: } (\lim_{\nu \to \infty} A_\nu)^{\lim_{\nu \to \infty} C_\nu} = \lim_{\nu \to \infty} (A_\nu{}^{C_\nu})\text{)}.$$

Man hat nämlich mit Benützung von Gl. (26):

$$A^C - \lim_{\nu \to \infty} A_\nu{}^{C_\nu} = \lim_{\nu \to \infty} A^{C_\nu} - \lim_{\nu \to \infty} A_\nu{}^{C_\nu} = \lim_{\nu \to \infty} (A^{C_\nu} - A_\nu{}^{C_\nu}) = 0,$$

da nach Ungl. (III) $|A^{C_\nu} - A_\nu{}^{C_\nu}|$ gleichzeitig mit $|A - A_\nu|$ *beliebig klein* wird, woraus dann die Richtigkeit von Gl. (27) unmittelbar hervorgeht.

Wählt man speziell A_ν, C_ν rational, etwa $A_\nu = a_\nu$, $C_\nu = c_\nu$ (also nach der bisherigen Bezeichnungsweise: $A = [a_\nu]$, $C = [c_\nu]$), so folgt aus (27), daß:

(28) $$A^C = \lim_{\nu \to \infty} a_\nu{}^{c_\nu},$$

sodaß man also A^C statt, wie geschehen (s. Gl. (8)), durch die Folge (A^{c_ν}) auch durch die prinzipiell etwas *einfachere* (nämlich nur rationale Potenzen *rationaler* Zahlen enthaltende) Folge $(a_\nu{}^{c_\nu})$ hätte *definieren* können. Ebenso hätte man, von der Potenz a^c mit *rationaler* Basis und *rationalem*

$P > 0$ und von 1 verschieden), so nehmen die betreffenden Ungleichungen eine für manche Zwecke bequemere Form an, z. B.:

$$(1 + Q)^C \begin{cases} > 1 + C \cdot \dfrac{Q}{1 + Q} & (C > 0), \\ > 1 + C \cdot Q & (C > 1), \\ < 1 + C \cdot Q & (0 < C < 1). \end{cases}$$

Exponenten ausgehend, zunächst a^C als $\lim_{\nu\to\infty} a^{c_\nu}$ und sodann A^C als $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu{}^C$ (cf. Gl. (25) für $A_\nu = a_\nu$) *definieren* können.

Wesentlich und wertvoll ist nun die auf Grund der Gleichungen (25) bis (27) gewonnene Erkenntnis, daß *jede* dieser rein logisch offenbar *gleichberechtigten* Definitionen stets *ein und dieselbe* (mit A^C zu bezeichnende) *reelle Zahl* erzeugt, und daß daher die *Willkür*, welche tatsächlich in der Bevorzugung irgendeiner *bestimmten* dieser an sich *gleich möglichen* Definitionen liegt, auf das *Endresultat* keinerlei Einfluß übt.

§ 32. Logarithmen.

1. Da die Operation des *Potenzierens keine kommutative* ist, so gestattet sie neben der in § 21 definierten Operation des *Radizierens* noch eine *zweite*, davon wesentlich *verschiedene Umkehrung*. Denkt man sich die fertige Potenz *als reelle Zahl vorgelegt*, so kann man, statt, wie bei der Radizierung, nach der *Basis* zu fragen, welche bei *gegebenem Exponenten* diese Potenz hervorbringt, auch darauf ausgehen, den *Exponenten* zu bestimmen, welcher bei *gegebener Basis* die fragliche Potenz liefert. Mit anderen Worten, es handelt sich um die Auflösung der Gleichung:

$$B^x = A, \tag{1}$$

wo A, B *gegebene* Zahlen bedeuten, die wir gleich als *beliebig reell*, jedoch als wesentlich *positiv* voraussetzen (letzteres, weil B^x bei *beliebigem* x zunächst nur für $B > 0$ definiert ist und sodann A gleichfalls > 0 ausfällt). Dabei ist nur noch die Annahme $B = 1$ ein für allemal auszuschließen, weil in diesem Falle für *jedes* x stets $B^x = 1$ resultieren würde.

Sei nun zunächst $B > 1$. Alsdann gibt es, da B^n mit wachsendem n schließlich beliebig groß, B^{-n} beliebig klein wird, in der Reihe der Potenzen $B^0, B^{\pm 1}, B^{\pm 2}, \cdots\cdots$ stets *eine* und *nur* eine, etwa B^{a_0} (wo also a_0 eine bestimmte Zahl aus der Reihe $0, \pm 1, \pm 2, \cdots$), derart, daß:

$$\textit{entweder:}\quad B^{a_0} = A, \qquad \textit{oder:}\quad B^{a_0} < A < B^{a_0+1}.$$

Im letzteren Falle nehme man eine positive ganze Zahl $b \geqq 2$ an und bilde die Zahlenreihe

$$a_0,\quad a_0 + \frac{1}{b},\quad a_0 + \frac{2}{b},\quad \cdots,\quad a_0 + \frac{b-1}{b}.$$

In dieser letzteren muß dann eine bestimmte Zahl $a_0 + \frac{a_1}{b}$ (wo also: $0 \leqq a_1 \leqq b - 1$) existieren, sodaß wiederum

$$\textit{entweder:}\quad B^{a_0 + \frac{a_1}{b}} = A, \qquad \textit{oder:}\quad B^{a_0 + \frac{a_1}{b}} < A < B^{a_0 + \frac{a_1+1}{b}}$$

Schließt man in dieser Weise weiter fort und setzt zur Abkürzung:

(2) $$\sigma_\nu = a_0 + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \cdots + \frac{a_\nu}{b^\nu}$$

(wo also a_0 eine bestimmte *positive* oder *negative ganze Zahl*, eventuell auch *Null* vorstellt und die a_k $(k = 1, 2, \cdots, \nu)$ Zahlen aus der Reihe $0, 1, \cdots, (b-1)$ bedeuten), so gelangt man also *entweder* nach einer *endlichen* Anzahl der angedeuteten Operationen zu einer Gleichung von der Form:

(3) $$B^{\sigma_n} = A,$$

oder man hat in *unbegrenzt* fortsetzbarer Folge:

(4) $$B^{\sigma_\nu} < A < B^{\sigma_\nu + \frac{1}{b_\nu}}.$$

Im *ersten* Falle hat man ohne weiteres:

(5) $$x = \sigma_n.$$

Im *zweiten* findet man zunächst nach Gl. (8) (rückwärts gelesen) des vorigen Paragraphen (S. 188):

$$\lim_{\nu\to\infty} B^{\sigma_\nu} = B^{[\sigma_\nu]}, \qquad \lim_{\nu\to\infty} B^{\sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu}} = B^{\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\sigma_\nu + \frac{1}{b_\nu}\right)} = B^{[\sigma_\nu]},$$

und somit wegen Ungl. (4) mit Benützung von § 28, Gl. (25) (S. 172) auch

(6) $$A = B^{[\sigma_\nu]}, \quad \text{d. h.} \quad x = [\sigma_\nu].$$

Es existiert also allemal, zunächst für $B > 1$, *eine bestimmte reelle Zahl* x, welche der Gleichung $B^x = A$ (wo $A > 0$) Genüge leistet, und zwar gibt es offenbar auch nur *eine einzige*. Denn aus: $B^{x'} = B^x$ folgt stets auch: $x' = x$ (s. Gl. (15), (16) des vorigen Paragraphen).

Im Falle $B < 1$ bestimme man nach der eben auseinandergesetzten Methode eine Zahl σ, welche der Gleichung genügt:

$$\left(\frac{1}{B}\right)^\sigma = A \quad \left(\text{wo jetzt: } \frac{1}{B} > 1\right).$$

Alsdann wird aber:

(7) $$B^{-\sigma} = A, \quad \text{d. h.} \quad x = -\sigma.$$

2. Man nennt die eindeutig bestimmte reelle Zahl x, welche der Gleichung:

$$B^x = A$$

genügt, den (reellen) *Logarithmus* von A für die *Basis* B, in Zeichen:

(8) $$x = \overset{B}{\log} A.$$

Die *Definition* des *Logarithmus* von A für die *Basis* B ist also vollständig enthalten in der Gleichung:

$$B^{\overset{B}{\log} A} = A. \tag{9}$$

Wegen:

$$B^0 = 1, \quad B^1 = B$$

hat man für *jede* positive Basis $B \gtrless 1$:

$$\overset{B}{\log}\, 1 = 0, \quad \overset{B}{\log}\, B = 1. \tag{10}$$

Um die Beziehung der Logarithmen von A für zwei *verschiedene* Basen B, B_1 festzustellen, hat man mit Benützung von Gl. (9):

$$A = B_1^{\overset{B_1}{\log} A}, \quad B_1 = B^{\overset{B}{\log} B_1},$$

also schließlich:

$$A = B^{\overset{B}{\log} B_1 \cdot \overset{B_1}{\log} A},$$

und hieraus durch Vergleichung mit (9):

$$\overset{B}{\log}\, B_1 \cdot \overset{B_1}{\log}\, A = \overset{B}{\log}\, A,$$

d. h.:

$$\overset{B_1}{\log}\, A = \frac{\overset{B}{\log}\, A}{\overset{B}{\log}\, B_1} = M \cdot \overset{B}{\log}\, A, \tag{11}$$

wo $M = \frac{1}{\overset{B}{\log}\, B_1}$ als der *Modulus* des *Logarithmensystems* mit der Basis B_1 in bezug auf dasjenige mit der Basis B bezeichnet wird. Die Gleichung (11) besagt also, daß aus den Logarithmen irgendeines bestimmten Systems (B) diejenigen für ein beliebiges anderes System (B_1) durch bloße Multiplikation mit dem lediglich von B, B_1, nicht aber von A abhängigen Faktor M gewonnen werden können.

Setzt man in Gl. (11) speziell $A = B$, so folgt mit Berücksichtigung von (10):

$$M = \overset{B_1}{\log}\, B = \frac{1}{\overset{B}{\log} B_1}, \quad \text{also:} \quad \overset{B}{\log}\, B_1\, \overset{B_1}{\log}\, B = 1. \tag{12}$$

Sind A_1, A_2 zwei beliebige positive Zahlen, und setzt man:

$$\overset{B}{\log}\, A_1 = L_1, \quad \overset{B}{\log}\, A_2 = L_2,$$

also:

$$A_1 = B^{L_1}, \quad A_2 = B^{L_2},$$

so folgt:

$$A_1 A_2 = B^{L_1 + L_2}, \quad \frac{A_1}{A_2} = B^{L_1 - L_2},$$

und daher:

$$(13) \quad \overset{B}{\log}(A_1 A_2) = \overset{B}{\log} A_1 + \overset{B}{\log} A_2, \quad \overset{B}{\log} \frac{A_1}{A_2} = \overset{B}{\log} A_1 - \overset{B}{\log} A_2,$$

und aus der zweiten dieser Gleichungen, für $A_1 = 1$ und $A_2 = A$:

$$(14) \qquad \overset{B}{\log} \frac{1}{A} = -\overset{B}{\log} A.$$

Ist ferner C eine *beliebige reelle* Zahl, so hat man:

$$A^C = (B^{\overset{B}{\log} A})^C = B^{C \cdot \overset{B}{\log} A},$$

und daher:

$$(15) \qquad \overset{B}{\log} A^C = C \cdot \overset{B}{\log} A.$$

Ist:

$$(16) \qquad A_2 > A_1, \quad \text{anders geschrieben:} \quad B^{\overset{B}{\log} A_2} > B^{\overset{B}{\log} A_1},$$

so hat man nach Ungl. (14) des vorigen Paragraphen (S. 190):

$$(17) \qquad \begin{cases} \overset{B}{\log} A_2 > \overset{B}{\log} A_1, & \text{wenn:} \quad B > 1 \\ \overset{B}{\log} A_2 < \overset{B}{\log} A_1, & \text{wenn:} \quad B < 1. \end{cases}$$

Ist insbesondere $B > 1$, so folgt hieraus, wenn man einmal $A_1 = 1$, $A_2 = A$, das andere Mal $A_2 = 1$, $A_1 = A$ setzt und berücksichtigt, daß $\overset{B}{\log} 1 = 0$ (Gl. (10)):

$$(18) \qquad \begin{cases} \overset{B}{\log} A > 0, & \text{wenn:} \quad A > 1, \\ \overset{B}{\log} A < 0, & \text{wenn:} \quad A < 1. \end{cases}$$

Umgekehrt im Falle $B < 1$.

Für die Zwecke der *praktischen Rechnung* wird bekanntlich $B = 10$ angenommen. Die Logarithmen für die Basis 10 werden sodann als *gemeine* oder Briggsche Logarithmen bezeichnet und zumeist schlechthin durch das Zeichen log (ohne ausdrückliche Hinzufügung der Basis) charakterisiert. Für *allgemeine analytische Untersuchungen* erscheint es dagegen vorteilhaft, sich der sogenannten *natürlichen* oder Neperschen Logarithmen zu bedienen, deren Basis eine gewisse, im folgenden Paragraphen zu definierende *Irrationalzahl* e ist, weil infolge der besonderen Eigenschaften der Zahl e alle auf Logarithmen bezügliche analytischen Entwicklungen eine etwas einfachere Form annehmen, als für jede andere Basis.

§ 33. Die Zahl e. — Formeln zur Abschätzung von e^{α}.

1. Die soeben erwähnte Zahl e soll definiert werden durch die Formel:

$$(1) \qquad e = \lim_{\nu=\infty} e_{\nu}, \quad \text{wo:} \quad e_{\nu} = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots).$$

Um vor allem zu zeigen, daß diese Definition einen Sinn hat, d. h. daß die Folge (e_{ν}) *konvergiert*, gehen wir aus von der für jedes *positive, von* 1 *verschiedene* P gültigen Ungleichung:

$$P^{\nu+1} > (\nu + 1) P - \nu,$$

welche aus der Ungl. (2) des § 30 (S. 179) hervorgeht, wenn man daselbst $n = \nu + 1$ setzt. Durch Substitution von $P = \frac{p}{q}$ und Multiplikation mit $q^{\nu+1}$ ergibt sich daraus:

$$(2) \qquad p^{\nu+1} > q^{\nu}\{(\nu + 1) p - \nu q\},$$

wo jetzt p, q lediglich der Bedingung zu genügen haben, *positiv* und voneinander *verschieden* zu sein.

Bedeutet ferner α eine beliebige positive oder negative Zahl, so werde gesetzt:

$$p = 1 + \frac{\alpha}{\nu + 1}, \quad q = 1 + \frac{\alpha}{\nu},$$

wobei im Falle $\alpha < 0$ allemal $\nu > |\alpha|$ sein soll, sodaß also p und q stets positiv ausfallen. Wegen:

$$(\nu + 1) p - \nu q = 1$$

folgt alsdann aus Ungl. (2):

$$(3) \qquad \left(1 + \frac{\alpha}{\nu + 1}\right)^{\nu+1} > \left(1 + \frac{\alpha}{\nu}\right)^{\nu} \quad \text{für:} \begin{cases} \alpha > 0 \\ \alpha < 0, \ \nu > |\alpha| \end{cases}$$

und daher speziell für $\alpha = 1$:

$$(4) \quad \left(1 + \frac{1}{\nu + 1}\right)^{\nu+1} > \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu}, \quad \text{d. h.} \quad e_{\nu+1} > e_{\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots).$$

Ebenso für $\alpha = -1$:

$$\left(1 - \frac{1}{\nu + 1}\right)^{\nu+1} > \left(1 - \frac{1}{\nu}\right)^{\nu} \quad (\nu = 2, 3, \cdots)$$

und hieraus durch Übergang zu den reziproken Werten:

$$\left(\frac{\nu + 1}{\nu}\right)^{\nu+1} < \left(\frac{\nu}{\nu - 1}\right)^{\nu} \quad (\nu = 2, 3, \cdots),$$

oder auch, wenn man ν durch $\nu + 1$ ersetzt:

(5) $$\left(1 + \frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+2} < \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1} \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots).$$

Führt man noch die Bezeichnung ein:

(6) $$\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1} = E_\nu, \quad \text{also:} \quad E_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \cdot e_\nu > e_\nu,$$

so folgt aus (5):

(7) $$E_{\nu+1} < E_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots).$$

Die e_ν bilden also eine *monoton zunehmende*, die E_ν eine *monoton abnehmende* Folge, und man hat:

(8) $$2 = e_1 < e_\nu < E_\nu < E_1 = 4.$$

Daraus ergibt sich, daß jede der beiden nach § 22, Nr. 6 (S. 130) *konvergenten* Zahlenfolgen $[e_\nu]$, $[E_\nu]$ einen endlichen *Grenzwert* und zwar, wie die Beziehung (6) lehrt, wegen: $\lim_{\nu\to\infty} E_\nu = \lim_{\nu\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \cdot \lim_{\nu\to\infty} e_\nu$, den *nämlichen* Grenzwert besitzt. Man kann also setzen:

(9) $$\lim_{\nu\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu} = \lim_{\nu\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1} = e,$$

wo jetzt e eine *bestimmte positive Zahl* (nämlich die Zahl $[e_\nu]$) bedeutet, welche im übrigen offenbar den Bedingungen genügt:

(10) $$e_\nu < e < E_\nu \quad \left(\text{d. h.} \ \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu} < e < \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}\right).$$

Da aber:

(11) $$E_\nu - e_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \cdot e_\nu - e_\nu = \frac{1}{\nu} \cdot e_\nu < \frac{4}{\nu},$$

so lehrt Ungl. (10), wie die Zahl e zwischen unendlich viele *rationale* Zahlenpaare von beliebig klein vorzuschreibender Differenz eingeschlossen werden oder, wie man zu sagen pflegt, *bis auf einen vorgeschriebenen Grad von Genauigkeit näherungsweise berechnet* werden kann. Eine merklich schneller zu diesem Ziele führende Methode, welche überdies auch erkennen läßt, daß e eine *Irrationalzahl* ist, wird in Nr. 4 dieses Paragraphen angegeben werden.

2. Es soll jetzt gezeigt werden, daß auch dann die Zahl e als Grenzwert erscheint, wenn an die Stelle der natürlichen Zahlenreihe (ν) *eine ganz beliebige Zahlenfolge* (ω_ν) *tritt, sofern diese nur der Bedingung genügt:* $\lim_{\nu\to\infty} |\omega_\nu| = +\infty$.

Es sei zunächst (a_ν) $(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$ eine Folge beliebiger positiver

Zahlen[1]) mit dem Grenzwert $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = +\infty$. Man kann dann jeder dieser Zahlen a_ν eine bestimmte *natürliche* Zahl m_ν so zuordnen, daß:

$$m_\nu \leqq a_\nu < m_\nu + 1,$$

also:

$$1 + \frac{1}{m_\nu} \geqq 1 + \frac{1}{a_\nu} > 1 + \frac{1}{m_\nu + 1}$$

und daher, wegen:

$$m_\nu + 1 > a_\nu \geqq m_\nu$$

a fortiori:

$$\left(1 + \frac{1}{m_\nu}\right)^{m_\nu + 1} > \left(1 + \frac{1}{a_\nu}\right)^{a_\nu} > \left(1 + \frac{1}{m_\nu + 1}\right)^{m_\nu},$$

anders geschrieben:

$$\left(1 + \frac{1}{m_\nu}\right) \cdot e_{m_\nu} > \left(1 + \frac{1}{a_\nu}\right)^{a_\nu} > \left(1 + \frac{1}{m_\nu + 1}\right)^{-1} \cdot e_{m_\nu + 1}.$$

Da aber:

$$\lim_{\nu\to\infty} e_{m_\nu} = \lim_{\nu\to\infty} e_{m_\nu + 1} = e \quad \text{(s. § 23, S. 137, Gl. (2))}$$

und:

$$\lim_{\nu\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m_\nu}\right) = \lim_{\nu\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m_\nu + 1}\right)^{-1} = 1,$$

so folgt schließlich (nach § 28, Gl. (25), S. 172):

(12) $$\lim_{\nu\to\infty}\left(1 + \frac{1}{a_\nu}\right)^{a_\nu} = e.$$

Ferner hat man:

$$\left(1 - \frac{1}{a_\nu}\right)^{-a_\nu} = \left(\frac{a_\nu}{a_\nu - 1}\right)^{a_\nu} = \left(1 + \frac{1}{a_\nu - 1}\right)^{a_\nu - 1} \cdot \left(1 + \frac{1}{a_\nu - 1}\right),$$

und da der letzte Faktor für $\nu = \infty$ wiederum den Grenzwert 1, der erste nach Gl. (12) den Grenzwert e besitzt, wiederum:

(13) $$\lim_{\nu\to\infty}\left(1 - \frac{1}{a_\nu}\right)^{-a_\nu} = e.$$

Bedeutet jetzt (ω_ν) eine Zahlenfolge, von welcher nur vorausgesetzt wird, daß $\lim_{\nu\to\infty} |\omega_\nu| = +\infty$ (während unter den Zahlen ω_ν selbst unend-

---

1) In den vorangehenden Paragraphen wurden *beliebige reelle* Zahlen zum Unterschiede von den ausdrücklich als *rational* vorausgesetzten durch *große*, diese letzteren dagegen durch *kleine* lateinische Buchstaben bezeichnet. Nachdem jetzt aber die vollkommene Übereinstimmung der Rechnungsregeln (und zwar nicht nur bezüglich der *vier Spezies*, sondern auch für *Potenzen mit beliebigem reellen Exponenten*) festgestellt ist, lassen wir von jetzt ab den obigen Unterschied in der Bezeichnungsweise fallen, d. h. *jeder* Buchstabe kann generell *jede beliebige reelle Zahl* vorstellen, solange nicht ausdrücklich irgendwelche einschränkende Festsetzungen getroffen werden.

lich viele positive, wie negative sein dürfen), so folgt zunächst aus Gl. (12) und (13), daß:

$$\lim_{\nu \to \infty}\left(1 + \frac{1}{|\omega_\nu|}\right)^{|\omega_\nu|} = e, \quad \lim_{\nu \to \infty}\left(1 - \frac{1}{|\omega_\nu|}\right)^{-|\omega_\nu|} = e,$$

und daher, wenn etwa eine aus den Zahlen $|\omega_\nu|$ und $-|\omega_\nu|$ *zusammengesetzte* Folge mit (ω_ν') bezeichnet wird, auch:

(14) $$\lim_{\nu \to \infty}\left(1 + \frac{1}{\omega_\nu'}\right)^{\omega_\nu'} = e \quad \text{(nach § 28, Nr. 3, S. 170, I)}.$$

Da aber die aus allen möglichen $\pm|\omega_\nu|$ zusammengesetzte Folge (ω_ν') offenbar die Folge (ω_ν) als Teilfolge enthält und die analoge Beziehung auch für die Folgen $\left[\left(1 + \frac{1}{\omega_\nu'}\right)^{\omega_\nu'}\right]$ und $\left[\left(1 + \frac{1}{\omega_\nu}\right)^{\omega_\nu}\right]$ gilt, so ergibt sich (ebenfalls nach S. 170, I), daß auch:

(15) $$\lim_{\nu \to \infty}\left(1 + \frac{1}{\omega_\nu}\right)^{\omega_\nu} = e,$$

womit die Richtigkeit des zu Anfang dieser Nummer angekündigten Resultates erwiesen ist.

Setzt man $\frac{1}{\omega_\nu} = \delta_\nu$, so hat man offenbar $\lim_{\nu \to \infty} \delta_\nu = 0$, und umgekehrt folgt aus dieser letzteren Beziehung mit dem Zusatze, daß die δ_ν für jeden einzelnen Index ν als *von Null verschieden* angenommen werden, daß $\lim_{\nu \to \infty}\left|\frac{1}{\delta_\nu}\right| = +\infty$. Man kann daher Gl. (15) auch durch die folgende ersetzen:

(16) $$\lim_{\nu \to \infty}(1 + \delta_\nu)^{\frac{1}{\delta_\nu}} = e, \quad \text{wenn:} \quad \begin{cases} |\delta_\nu| > 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots) \\ \lim_{\nu \to \infty} \delta_\nu = 0. \end{cases}$$

Wir wollen hierfür gelegentlich auch die *kürzere Schreibweise* benützen:

(17) $$\lim_{\delta \to 0}(1 + \delta)^{\frac{1}{\delta}} = e,$$

deren wahrer Inhalt in der Zusammenfassung aller möglichen Beziehungen von der Form (16) besteht.[1]

---

1) Die in gleichem Sinne angewendete ältere Schreibweise: $\lim_{\delta = 0}(1 + \delta)^{\frac{1}{\delta}}$ (vgl. S. 160, Fußn. 1) ist eigentlich wenig passend und namentlich für den Anfänger verwirrend, da ja gerade unter den Werten, welche man δ (abgekürzt für δ_ν) beizulegen hat, der Wert $\delta = 0$ *definitiv auszuschließen* ist. Es müßte also zum mindesten heißen: $\lim_{\lim \delta = 0}(1 + \delta)^{\frac{1}{\delta}}$, wofür wir eben kürzer schreiben: $\lim_{\delta \to 0}(1 + \delta)^{\frac{1}{\delta}}$, in Worten: Limes für δ *gegen Null* (ausführlicher: wenn δ *gegen Null konvergiert*).

3. Setzt man, was offenbar den über ω_ν gemachten Voraussetzungen entspricht, in Gl. (15) $\omega_\nu = \frac{\nu}{\alpha}$, wo ν wiederum eine *natürliche*, α eine *ganz beliebige reelle* Zahl bedeutet, so wird:

$$\lim_{\nu \to \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\alpha}} = e,$$

und daher:

$$e^\alpha = \left\{ \lim_{\nu \to \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\alpha}} \right\}^\alpha.$$

Nun ist aber nach § 31, Gl. (25), S. 193 allgemein:

$$(\lim_{\nu \to \infty} A_\nu)^\alpha = \lim_{\nu \to \infty} (A_\nu{}^\alpha),$$

sodaß sich (mit Benützung von Gl. (19), S. 176) ergibt:

(18) $$e^\alpha = \lim_{\nu \to \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\nu}\right)^\nu.$$

Es läßt sich somit jede Potenz von e mit *ganz beliebigem reellen* Exponenten darstellen bzw. berechnen als *Grenzwert* einer Folge von Potenzen mit *ganzen positiven* Exponenten.

Dieses Resultat kann zunächst dazu dienen, um zwei für spätere Anwendungen nützliche Ungleichungen zur Abschätzung von e^α herzuleiten. Da nach Ungl. (3) dieses Paragraphen die Zahlen $\left(1 + \frac{\alpha}{\nu}\right)^\nu$ mit ν monoton zunehmen, so hat man für *jedes endliche* ν:

$$e^\alpha > \left(1 + \frac{\alpha}{\nu}\right)^\nu$$

(wobei im Falle $\alpha < 0$ lediglich $\nu > |\alpha|$ zu nehmen ist). Man hat daher, wenn man speziell $\nu = 1$ setzt:

$$e^\alpha > 1 + \alpha \quad \text{für } \alpha > 0 \text{ und } -1 < \alpha < 0.$$

Oder auch, wenn man berücksichtigt, daß diese Ungleichung für $\alpha = 0$ in eine Gleichung übergeht, etwas kürzer:

(19) $$e^\alpha \geqq 1 + \alpha \quad \text{für} \quad \alpha > -1,$$

mit dem Zusatze, daß das *Gleichheits*zeichen nur im Falle $\alpha = 0$ gilt. Schreibt man hier $-\alpha$ statt α, so gilt:

$$e^{-\alpha} \geqq 1 - \alpha \quad \text{für} \quad -\alpha > -1, \quad \text{also für} \quad \alpha < 1$$

(d. h. ausführlicher gesagt, für alle *positiven* α zwischen 0 und 1 und *alle möglichen negativen* α gilt das Zeichen *„größer"*, das *Gleichheits*zeichen

nur für $\alpha = 0$). Hieraus folgt, da $1 - \alpha > 0$, durch Übergang zu den reziproken Werten, in entsprechendem Umfange:

$$e^{\alpha} \leqq \frac{1}{1-\alpha} \quad \text{für} \quad \alpha < 1. \tag{20}$$

Da den Beziehungen (19), (20) das Gebiet $-1 < \alpha < +1$ *gemeinsam* ist, so folgt insbesondere, daß *gleichzeitig:*

$$e^{\alpha} \left\{ \begin{array}{l} \geqq 1 + \alpha \\ \leqq \frac{1}{1-\alpha} \end{array} \right\} \text{wenn} \quad |\alpha| < 1. \tag{21}$$

Setzt man noch in Ungl. (19):

$$1 + \alpha = a, \quad \text{sodaß also:} \quad a > 0 \text{ für } \alpha > -1, \quad \textit{vice versa,}$$

in Ungl. (20):

$$\frac{1}{1-\alpha} = a, \quad \text{sodaß also:} \quad a > 0 \text{ für } \alpha < 1, \quad \textit{vice versa,}$$

und berücksichtigt außerdem, daß in beiden Fällen dem Werte $\alpha = 0$ der Wert $a = 1$ entspricht, so gehen jene Ungleichungen (19), (20) in die folgenden über:

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{a-1} \geqq a \\ e^{1-\frac{1}{a}} \leqq a \end{array} \right\} \text{für} \quad a > 0, \tag{22}$$

wobei das *Gleichheits*zeichen ausschließlich im Falle $a = 1$ zu gelten hat.

4. Es soll jetzt noch, wie am Schlusse von Nr. 1 angekündigt wurde, eine andere, zur numerischen Berechnung wesentlich geeignetere Darstellungsform der Zahl e abgeleitet werden.

Mit Hilfe des binomischen Satzes findet man:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu} &= 1 + \frac{\nu}{1} \cdot \frac{1}{\nu} + \frac{\nu \cdot (\nu - 1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{\nu^2} + \cdots + \frac{\nu \cdot (\nu-1) \cdots 1}{1 \cdot 2 \cdots \nu} \cdot \frac{1}{\nu^{\nu}} \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)\left(1 - \frac{2}{\nu}\right) + \cdots \\ &\qquad \cdots + \frac{1}{\nu!}\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)\left(1 - \frac{2}{\nu}\right) \cdots \frac{1}{\nu} \\ &< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{\nu!}, \end{aligned} \tag{23}$$

und daher nach § 28, Ungl. 22, S. 172, für $\nu \to \infty$:

$$e \leqq \lim_{\nu \to \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{\nu!}\right).^{1)} \tag{24}$$

---

1) Da $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{\nu!}$ gleichzeitig mit ν monoton zunimmt, so *existiert* $\lim_{\nu \to \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{\nu!}\right)$ *zum mindesten im weiteren Sinne* (§ 26,

Andererseits folgt aus Gl. (23) für jedes $n < \nu$:

$$\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{\nu}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{\nu}\right)$$

und daher für $\nu \to \infty$:

$$e > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$ [1]

Läßt man jetzt n ins Unendliche wachsen, so ergibt sich:

$$(25) \qquad e \geqq \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$

Durch Vergleichung mit Formel (24) ergibt sich dann als die oben in Aussicht gestellte neue Darstellungsform der Zahl e:

$$(26) \qquad e = \lim_{\nu\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{\nu!}\right).$$

Setzt man:

$$(27) \qquad 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = s_n,$$

und schreibt in Gl. (26) $n + \varrho$ statt ν, so wird:

$$e = s_n + \lim_{\varrho\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+\varrho)!}\right),$$

andererseits:

$$e > s_n,$$

und daher:

$$(28) \qquad 0 < e - s_n = \lim_{\varrho\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+\varrho)!}\right).$$

Man hat aber:

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+\varrho)!} < \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \left(\frac{1}{n+2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{n+2}\right)^{\varrho-n-1}\right)$$

$$(29) \qquad = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{n+2}\right)^{\varrho-n}}{1-\frac{1}{n+2}},$$

sodaß Ungl. (28) in die folgende übergeht:

$$(30) \qquad 0 < e - s_n \leqq \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} < \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!\,n}.$$

Nr. 3, S. 165). Daß dieser Grenzwert in Wahrheit *endlich* ausfällt, folgt dann aus Gl. (25), kann aber auch unmittelbar mit Hilfe der folgenden Beziehung erkannt werden:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{\nu!} < 2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{\nu-1}}\right) = 2 + \left(1 - \frac{1}{2^{\nu-1}}\right) < 3.$$

1) Man bemerke, daß bei diesem Grenzübergange das *Gleichheits*zeichen von vornherein ausgeschlossen erscheint, da es ja allemal freisteht, jedes bestimmte n durch ein noch größeres zu ersetzen.

Setzt man also:

$$(31) \qquad e = s_n + \Delta_n,$$

so folgt aus (30), daß:

$$(32) \qquad 0 < \Delta_n < \frac{1}{n!n},$$

und man erkennt, daß der Fehler, welchen man begeht, wenn man e durch die zu kleine Zahl s_n ersetzt, mit wachsendem n außerordentlich schnell abnimmt. Man findet z. B. schon für $n = 10$:

$$\Delta_{10} < \frac{1}{10!\,10} = \frac{1}{36288000},$$

sodaß also s_{10} mit der Zahl e in den ersten 7 Dezimalstellen sicher vollkommen übereinstimmt. Man findet auf diese Weise

$$(33) \qquad e = 2{,}7182818 \cdots\cdots.$$

Im übrigen läßt die Gl. (31) in Verbindung mit der Ungl. (32) und der folgenden:

$$(34) \qquad \Delta_n > \frac{1}{(n+1)!}$$

(welch letztere sich unmittelbar daraus ergibt, daß:

$$e > s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)!}\Big),$$

erkennen, daß e *irrational* sein muß.

Wäre nämlich e *rational*, etwa gleich dem reduzierten Bruche $\frac{m}{n}$, so hätte man nach Gl. (31):

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \Delta_n,$$

wo nach Gl. (32), (34):

$$\frac{1}{(n+1)!} < \Delta_n < \frac{1}{n!n}.$$

Multipliziert man die obige Gleichung und diese Ungleichung mit $n!$, so würde weiter folgen:

$$m \cdot (n-1)! - \left(n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{n!}{n!}\right) = n!\,\Delta_n,$$

und andererseits:

$$\frac{1}{n+1} < n!\,\Delta_n < \frac{1}{n},$$

d. h. $n!\,\Delta_n$ wäre eine *ganze* Zahl, welche zwischen $\frac{1}{n+1}$ und $\frac{1}{n}$ liegt, was offenbar unmöglich ist.

§ 34. Die natürlichen Logarithmen. — Abschätzungsformeln für lg a. — Die Eulersche Konstante γ.

1. Der *natürliche* Logarithmus einer beliebigen positiven Zahl a, d. h. der Logarithmus von a für die Basis e, soll

statt mit: $\overset{e}{\log}\, a$

stets kürzer mit: $\lg a$ [1])

bezeichnet werden. Unter *Logarithmen schlechthin* sollen von jetzt ab stets *natürliche* Logarithmen verstanden werden.

Zwischen dem Briggschen und dem *natürlichen* Logarithmus einer Zahl a besteht nach § 32, Gl. (11) (S. 196) die Beziehung:

$$\text{(1)} \qquad \overset{10}{\log}\, a = \frac{\lg a}{\lg 10} = M \cdot \lg a,$$

wo $M = \frac{1}{\lg 10} = \overset{10}{\log}\, e$ (s. § 32, Gl. (12), S. 196) schlechthin als der *Modulus* der Briggschen Logarithmen bezeichnet wird. (Beiläufig bemerkt ergibt sich: $M = 0{,}43429 \cdots$.)

Die Relationen (22) des vorigen Paragraphen können unmittelbar dazu dienen, um $\lg a$ in gewisse Grenzen einzuschließen. Ersetzt man nämlich auf der rechten Seite der Ungleichungen (22) a durch $e^{\lg a}$, so folgt mit Benützung von § 31, Ungl. (14), S. 190, unmittelbar, daß für $a > 0$:

$$\text{(2)} \qquad \lg a \begin{cases} \leqq a - 1, \\ \geqq 1 - \frac{1}{a}, \end{cases}$$

wobei das *Gleichheits*zeichen wiederum lediglich für $a = 1$ gilt. Oder auch, wenn man $a = 1 + \alpha$ setzt:

$$\text{(3)} \qquad \lg(1+\alpha) \left\{ \begin{array}{l} \leqq \alpha \\ \geqq \frac{\alpha}{1+\alpha} \end{array} \right\} \text{ für: } \alpha > -1,$$

wo jetzt das Gleichheitszeichen sich auf den einzigen Fall $\alpha = 0$ bezieht.

2. Da $e > 1$, so folgt aus § 32, Ungl. (17) (S. 197), daß $\lg a_\nu$ *gleichzeitig mit a_ν monoton zunimmt.* Dabei wird offenbar:

$$\text{(4)} \qquad \lim_{\nu \to \infty} \lg a_\nu = +\infty, \quad \text{wenn: } \lim_{\nu \to \infty} a_\nu = +\infty.$$

---

1) Man findet häufig auch die Bezeichnungen: $l\,a$ und $\ln a$.

Denn, solange $\lg a_\nu < g$, bleibt auch $a_\nu = e^{\lg a_\nu} < e^g$, d. h. unter einer endlichen positiven Zahl.

Um das Unendlichwerden von $\lg n$ für $n \to \infty$ noch in genauerer Weise zu charakterisieren, stellen wir die folgende Betrachtung an. Aus (3) ergibt sich für $\alpha = \frac{1}{\nu}$:

(3a) $$\frac{1}{\nu} > \lg\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) > \frac{1}{\nu + 1},$$

also:

$$-\frac{1}{\nu} < -\lg\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) < -\frac{1}{\nu + 1}$$

und:

(5) $$0 < \frac{1}{\nu} - \lg\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) < \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu + 1}.$$

Substituiert man hier der Reihe nach $\nu = 1, 2, \cdots, n$, so ergibt sich durch Addition der resultierenden Ungleichungen:

(6) $$0 < s_n - \lg(n+1) < 1 - \frac{1}{n+1},$$

wenn man setzt:

(7) $$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = s_n$$

und beachtet, daß:

$$\lg\left(1+\frac{1}{1}\right) + \lg\left(1+\frac{1}{2}\right) + \cdots + \lg\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lg\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n}\right) = \lg(n+1).$$

Die Ungl. (6) lehrt dann zunächst, daß $s_n - \lg(n+1)$ stets *positiv* bleibt und auch bei unbegrenzt wachsendem n *niemals die* 1 *übersteigen kann*. Da andererseits:

(8) $$s_n - \lg(n+1) = \left(\frac{1}{1} - \lg\left(1+\frac{1}{1}\right)\right) + \left(\frac{1}{2} - \lg\left(1+\frac{1}{2}\right)\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \lg\left(1+\frac{1}{n}\right)\right),$$

wo jeder Summand nach Ungl. (5) *wesentlich positiv* ist, so folgt, daß $s_n - \lg(n+1)$ mit n *monoton zunimmt* und somit für $\lim n = \infty$ einen *bestimmten Grenzwert* besitzen muß, etwa:

(9) $$\lim_{n\to\infty}(s_n - \lg(n+1)) = \gamma.$$

Dabei bedeutet also γ *eine bestimmte positive Zahl* < 1, welche als die Eulersche (auch fälschlich als die Mascheronische) *Konstante* bezeichnet wird. Die Definitionsgleichung (9) kann auch dazu dienen, um

γ näherungsweise zu berechnen, vorausgesetzt, daß man $\lg(n+1)$ schon berechnet hat. Setzt man nämlich für jedes bestimmte n:

$$s_n - \lg(n+1) = \gamma_n, \tag{10}$$

so folgt aus Ungl. (5) durch Substitution von $\nu = (n+1), (n+2), \cdots, (n+\varrho)$ und Addition der betreffenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+\varrho} - \lg\frac{n+\varrho+1}{n+1} \\ &= \gamma_{n+\varrho} - \gamma_n < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+\varrho+1}, \end{aligned} \tag{11}$$

und daher für $\varrho \to \infty$:

$$0 < \gamma - \gamma_n \leqq \frac{1}{n+1}, \quad \text{d. h.} \quad \gamma_n < \gamma \leqq \gamma_n + \frac{1}{n+1}, \tag{12}$$

wobei $\frac{1}{n+1}$ durch Wahl von n *beliebig klein*, also die *Annäherung* von γ_n an γ — wenigstens *theoretisch* — *beliebig groß* gemacht werden kann. *Praktisch brauchbarere* Methoden zur Berechnung von γ liefert die Funktionenlehre.[1]) (Man findet: $\gamma = 0{,}577215\cdots\cdots$.)

Da:

$$s_n - \lg(n+1) = (s_n - \lg n) - \lg\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

und:

$$\lim_{n\to\infty} \lg\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$$

so kann man der Gl. (9) nach Bedarf auch die folgende Form geben:

$$\lim_{n\to\infty}(s_n - \lg n) = \gamma. \tag{13}$$

---

1) Vgl. Bd. II dieser Vorlesungen. Dies gilt auch bezüglich der im Text als bereits erledigt angenommenen Berechnung von $\lg(n+1)$ bzw. allgemeiner von $\lg a$.

Kapitel V.

Erweiterungen des Grenzwertbegriffes, Null- und Unendlichkeitstypen.

§ 35. Obere und untere *Grenze* einer beliebigen Zahlenfolge. (Reales und ideales Maximum bzw. Minimum.)

1. Wir betrachten jetzt Folgen beliebiger reeller Zahlen, welche zunächst lediglich der Bedingung unterworfen sind, daß ihre absoluten Beträge *endlich bleiben*, d. h. durchweg *unterhalb einer bestimmten Zahl* liegen.[1]) Alsdann soll gezeigt werden:

Jeder Zahlenfolge (a_ν) mit endlich bleibenden Gliedern kommt eine gewisse obere Grenze G zu; d. h. es gibt eine und nur eine bestimmte Zahl G, derart daß für keinen Wert von ν die Beziehung $a_\nu > G$ besteht; daß dagegen entweder mindestens ein bestimmtes Glied $a_m = G$ vorhanden ist, oder, wenn dies nicht der Fall sein sollte, jedenfalls unbegrenzt viele Glieder a_{m_k}, welche G beliebig nahe kommen[2]), *sodaß also: $G - a_{m_k} < \varepsilon$ (wenn ε eine positive Zahl von beliebig vorzuschreibender Kleinheit bedeutet).*

Im ersteren Falle soll dann G das reale, im zweiten das ideale Maximum der Zahlenfolge (a_ν) heißen.[3])

---

1) Man pflegt solche Zahlenfolgen nach dem Vorgange französischer Mathematiker neuerdings häufig auch als *beschränkt* (= suites bornées) zu bezeichnen.

2) Selbstverständlich kann auch im Falle $a_m = G$ die Folge (a_ν) überdies unbegrenzt viele Glieder enthalten, die G beliebig nahe kommen.

3) Beispiele: (1) $a_\nu = \frac{1}{1+(\nu-m)^2}$, wo m eine beliebige natürliche Zahl bedeutet. Man hat zunächst: $a_0 = \frac{1}{1+m^2}$, dann nehmen die Glieder beständig zu bis $a_m = 1$. Alle folgenden Glieder sind echte Brüche mit dem Grenzwert *Null* (übrigens, wie auch die vorangehenden, durchweg $\leq \frac{1}{2}$). Die Folge besitzt also das *reale Maximum* $a_m = 1$, und alle übrigen Glieder sind um mindestens $\frac{1}{2}$ davon verschieden.

(2) $a_\nu = (-1)^\nu \cdot \left(\frac{\nu^2-1}{\nu^2+1}\right)^2$. Man hat: $a_0 = 1$, $a_1 = 0$; die übrigen Glieder sind durchweg echte Brüche mit wechselndem Vorzeichen, und zwar findet man: $\lim_{\mu\to\infty} a_{2\mu} = 1$. Die Folge besitzt also das *reale Maximum* $a_0 = 1$, dem überdies alle $a_{2\mu}$ für hinlänglich großes μ *beliebig nahe* kommen.

(3) $a_\nu = (-1)^\nu \frac{\nu}{\nu+1}$. Die Folge besitzt das *ideale Maximum* $G = 1$.

Beweis.[1]) Vergleicht man[2]) das Anfangsglied a_0 mit jedem der folgenden Glieder $a_1, a_2, \cdots$, so sind nur folgende zwei Fälle möglich. *Entweder:* die Zahl a_0 wird von *keinem* der späteren Glieder *überstiegen* (wenn auch möglicherweise noch *beliebig oft erreicht*): alsdann ist offenbar $G = a_0$ das *reale Maximum* der Folge.

Oder: es gibt in der Reihe $a_1, a_2, \cdots$ ein *erstes* Glied a_{m_1}, welches a_0 und somit auch alle *zwischen* a_0 und a_{m_1} liegenden Glieder *übersteigt*, sodaß also:

(1) $$a_\nu < a_{m_1} \quad \text{für:} \quad \nu = 0, 1, \cdots, (m_1 - 1).$$

Vergleicht man jetzt wiederum a_{m_1} mit allen nachfolgenden Gliedern, so muß *entweder* a_{m_1} das *reale Maximum* der mit a_{m_1} *beginnenden* und somit wegen Ungl. (1) der *gesamten* Zahlenfolge (a_ν) sein; *oder* es gibt wiederum ein *erstes* Glied $a_{m_2} > a_{m_1}$, sodaß also allgemein:

(2) $$a_\nu < a_{m_2} \quad \text{für:} \quad \nu = 0, 1, \cdots, (m_2 - 1).$$

Fährt man in dieser Weise weiter fort, so gelangt man *entweder* nach einer gewissen endlichen Anzahl derartiger Operationen zu einem Glied $a_m = G$, welche das *reale Maximum* aller *folgenden* Glieder, folglich auch, wegen:

(3) $$\begin{cases} a_0 < a_{m_1} < a_{m_2} < \cdots < a_m \\ \text{und:} \quad a_\nu < a_{m_k} \quad \text{für:} \quad \nu = 0, 1, \cdots, (m_k - 1), \end{cases}$$

dasjenige der *gesamten* Zahlenfolge darstellt.

---

1) Der Beweis für die Existenz der oberen und unteren Grenze (wie auch für diejenige des im folgenden Paragraphen noch einzuführenden oberen und unteren Limes) läßt sich kürzer führen und zwar nach einer Methode, welche gestattet, die betreffenden Ergebnisse auf *nicht-abzählbare* Zahlenmengen auszudehnen, und die aus diesem Grunde auch an späterer Stelle (im zweiten Bande dieser Vorlesungen) noch auseinandergesetzt werden soll. Dagegen bietet die hier befolgte Methode den wesentlichen Vorteil, einen gründlicheren und für tiefere Erkenntnis unentbehrlichen Einblick in das Wesen und die Struktur der Zahlenfolgen zu vermitteln.

2) Die *wirkliche Ausführung* dieser *Vergleichung* ist natürlich nur möglich, wenn zur Beurteilung der a_ν ein *Bildungsgesetz von genügender Einfachheit* vorliegt. (So ließ sich z. B. in § 33 [S. 199, Ungl. (5)] direkt feststellen, daß:

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^2 > \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1} \quad \text{für:} \quad \nu = 2, 3, \cdots \textit{ in infinitum.})$$

Wie aber auch das Bildungsgesetz der a_ν beschaffen sei, so *existiert* das *Resultat jener Vergleichung* für jedes einzelne ν als ein vollkommen *eindeutig bestimmtes* (wenn auch nicht allemal bestimm*bares*): *entweder* ist $a_0 \geq a_\nu$, *oder* $a_0 < a_\nu$.

Das im Texte angegebene Verfahren ist also nicht etwa dahin zu deuten, als ob die *Bestimmung* der Zahl G auf diesem Wege stets *wirklich geleistet* werden könnte, vielmehr wird dadurch nur die *Existenz* der Zahl G außer Zweifel gestellt.

Oder: man erhält eine *unbegrenzte* Folge von der Form:

(4) $$a_0 < a_{m_1} < a_{m_2} < \cdots < a_{m_k} < a_{m_{k+1}} < \cdots\cdots,$$

welche, als *monoton zunehmende* Folge mit endlich bleibenden Gliedern, einen bestimmten Grenzwert G besitzt. Alsdann ist offenbar G das *ideale Maximum* der Zahlenfolge (a_ν). Denn man hat für jeden Wert von k:

(5) $$a_{m_k} < G \quad \text{und daher auch:} \quad a_\nu < G.$$

Andererseits muß sich wegen der Konvergenz der Zahlenfolge (4) jeder positiven Zahl ε eine positive ganze Zahl n so zuordnen lassen, daß:

(6) $$0 < G - a_{m_k} < \varepsilon \quad \text{für:} \quad k \geqq n,$$

womit die ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

Daß es nur *eine* Zahl G der fraglichen Art gibt, ist im ersten der beiden betrachteten Fälle unmittelbar einleuchtend und folgt im zweiten aus Ungl. (6) mit Benützung des bereits mehrfach angewendeten Beweisprinzips von § 26, Nr. 1 (S. 161).

2. Ein ganz analoger Satz gilt bezüglich der *unteren Grenze*, nämlich:

Jeder Zahlenfolge (a_ν) mit endlich bleibenden Gliedern kommt eine gewisse untere Grenze g zu; d. h. es gibt eine und nur eine bestimmte Zahl g, derart, daß für keinen Wert von ν die Beziehung $a_\nu < g$ besteht; daß dagegen entweder mindestens ein bestimmtes Glied $a_m = g$ vorhanden ist, oder, wenn dies nicht der Fall sein sollte, jedenfalls unbegrenzt viele Glieder a_{m_ν}, welche g beliebig nahe kommen, sodaß also: $a_{m_\nu} - g < \varepsilon$ (wo $\varepsilon > 0$ und beliebig klein).

Im ersteren Falle heißt g das reale, im zweiten das ideale Minimum der Zahlenfolge (a_ν).

Der Beweis läßt sich offenbar ganz analog, wie derjenige für die Existenz der *oberen* Grenze, kürzer jedoch folgendermaßen führen: Die Zahlenfolge $(-a_\nu)$ besitzt nach Nr. 1 eine gewisse *obere* Grenze G', d. h. man hat:

$$-a_\nu \leqq G' \quad \text{(für jeden Wert } \nu\text{)},$$

und *entweder* für mindestens *einen* bestimmten Index m:

$$-a_m = G',$$

oder für eine unbegrenzte Reihe von Zahlen n_k lediglich:

$$G' - (-a_{n_k}) < \varepsilon \quad (\text{wo } \varepsilon > 0 \text{ und beliebig klein}).$$

Setzt man nun: $g = -G'$, so gehen diese Beziehungen in die folgenden über:

(7) $$-a_\nu \leqq -g, \quad \text{also:} \quad a_\nu \geqq g \quad (\text{für jedes } \nu),$$

(8) $$a_m = g \quad \text{bzw.} \quad -g - (-a_{n_k}) = a_{n_k} - g < \varepsilon,$$

d. h. g ist die fragliche *untere Grenze* der Zahlenfolge (a_ν), und zwar offenbar ein *reales* oder *ideales Minimum*, je nachdem G' ein *reales* oder *ideales Maximum* der Folge $(-a_\nu)$ bildet.

3. Bleiben die absoluten Beträge der Glieder a_ν *nicht* unter einer endlichen Zahl, so muß einer von den folgenden *drei* Fällen eintreten:

1) Es gibt *positive* Glieder, welche jede noch so große Zahl übersteigen, aber *keine negativen* mit absoluten Beträgen von dieser Beschaffenheit. Bildet man alsdann genau nach dem in Nr. 1 gelehrten Verfahren die zur Definition der oberen Grenze dienliche, monoton zunehmende Folge (a_{m_k}), so tritt hier an die Stelle der früheren Beziehung $\lim\limits_{k\to\infty} a_{m_k} = G$ die folgende: $\lim\limits_{k\to\infty} a_{m_k} = \infty$. Man sagt daher in diesem Falle, die *obere Grenze* der a_ν *rücke ins Unendliche*, oder kürzer, dieselbe *sei* $= +\infty$ (obschon diese Ausdrucksweise eigentlich wieder[1]) eine *contradictio in adjecto* enthält, da das Auftreten eines $\lim\limits_{k\to\infty} a_{m_k} = \infty$ in Wahrheit gerade *das Fehlen einer bestimmten oberen Grenze* anzeigt). — Die *untere* Grenze besitzt offenbar in dem vorliegenden Falle einen bestimmten endlichen Wert.

2) Es gibt *negative* Glieder, deren absolute Beträge jede noch so große Zahl übersteigen, aber *keine positiven* von dieser Beschaffenheit. Alsdann sagt man analog, die *untere Grenze* der a_ν sei $= -\infty$ (während offenbar hier die *obere* einen bestimmten endlichen Wert besitzt).

3) Die Folge enthält *sowohl positive als negative* Glieder, welche numerisch jede noch so große Zahl übersteigen. Alsdann hat man $+\infty$ als *obere*, $-\infty$ als *untere Grenze*.

§ 36. Oberer und unterer *Limes* einer Zahlenfolge (Hauptlimites, Unbestimmtheitsgrenzen). — Grenz- oder Häufungszahlen.

1. Jeder Folge reeller Zahlen kommen außer der im vorigen Paragraphen definierten oberen und unteren *Grenze* noch zwei weitere (unter Umständen in eine einzige zusammenfallende) charakteristische Zahlen zu, welche zwar in gewissen, weiter unten näher zu bezeichnenden Fällen

1) Vgl. § 26, Nr. 4 (S. 164).

jenen ersteren *gleich* sein können, jedoch nach *Definition* wesentlich davon *verschieden* sind. Wir zeigen zunächst folgendes:

Jede Zahlenfolge (a_ν) *mit endlich bleibenden Gliedern besitzt einen bestimmten oberen Limes* L *und unteren Limes* l, *in Zeichen:*

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, a_\nu = L, \quad \underline{\lim_{\nu\to\infty}}\, a_\nu = l;\,[1]$$

d. h. es existieren zwei (unter Umständen in eine einzige zusammenfallende) Zahlen L, l *von folgender Beschaffenheit: jedem* $\varepsilon > 0$ *läßt sich eine natürliche Zahl* m *und eine unbegrenzte Folge natürlicher Zahlen* m_k *so zuordnen, daß:*

(1) $$a_\nu < L + \varepsilon \quad \textit{für jedes } \nu \geqq m; \quad L - \varepsilon < a_{m_k} < L + \varepsilon;$$

desgleichen eine natürliche Zahl n *und eine unbegrenzte Folge natürlicher Zahlen* n_k, *sodaß:*

(2) $$a_\nu > l - \varepsilon \quad \textit{für jedes } \nu \geqq n; \quad l - \varepsilon < a_{n_k} < l + \varepsilon.$$

(Der *obere* und *untere Limes* werden auch als *obere* und *untere Unbestimmtheitsgrenze* bezeichnet. Wir fassen die fraglichen beiden Zahlen auch unter der Bezeichnung *Hauptlimites* der Folge (a_ν) zusammen.)

Beweis. Bezeichnet man mit G_ν die *obere Grenze* derjenigen Folge, welche aus $(a_0, a_1, a_2, \cdots)$ durch Weglassung der ersten ν Glieder entsteht, also der Folge $(a_\nu, a_{\nu+1}, a_{\nu+2}, \cdots)$, so ist offenbar $G_\nu \geqq G_{\nu+1}$, da ja durch *Weglassung* des Gliedes a_ν die obere Grenze sich allenfalls *erniedrigen*, keinesfalls aber sich vergrößern kann. Somit ist die unbegrenzt fortsetzbare Folge:

(3) $$G_0, G_1, G_2, \cdots, G_\nu, \cdots\cdots$$

eine *niemals zunehmende* und da mit den $|a_\nu|$ auch die $|G_\nu|$ unter einer endlichen Schranke bleiben, so ist diese Folge *konvergent*, sodaß man setzen kann:

(4) $$\lim_{\nu\to\infty} G_\nu = L,$$

wo L eine bestimmte endliche Zahl vorstellt, von der jetzt nachgewiesen werden soll, daß sie den durch die Ungleichungen (1) dargestellten Forderungen genügt. Dabei sind folgende Fälle zu unterscheiden:

Fall I. Die obere Grenze G der Gesamtfolge (a_ν) sei ein *ideales* oder ein *unendlich oft vorkommendes*[2]) *reales Maximum*. Da alsdann jede

---

1) Statt $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, a_\nu$ bzw. $\underline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, a_\nu$ findet man auch die älteren, etwas umständlicheren Bezeichnungen: $\lim\limits_{\nu=\infty} \sup a_\nu$ bzw. $\lim\limits_{\nu=\infty} \inf a_\nu$ (spr. Limes superior bzw. inferior).

2) Beispiel: $a_\nu = \dfrac{(-1)^\nu \cdot \nu + 1}{\nu + 1}$, also $a_{2\mu} = 1$, $a_{2\mu+1} = -\dfrac{\mu}{\mu+1}$. Die Folge hat also das *unendlich oft* vorkommende *reale Maximum* 1.

durch Weglassung beliebig vieler Anfangsglieder aus (a_ν) hervorgehende Folge immer wieder die obere Grenze G_0 besitzt, so hat man offenbar:

(5) $$G_0 = G_1 = G_2 = \cdots = G_\nu = \cdots\cdots, \quad \text{also auch} \quad L = G_0.$$

Ist nun G_0 ein *ideales* Maximum, so hat man nach Nr. 1 des vorigen Paragraphen (S. 211, Ungl. (4)):

(6) $$G_0 = \lim_{k\to\infty} a_{m_k}, \quad \text{wo:} \quad a_0 < a_{m_1} < \cdots < a_{m_k} < \cdots\cdots,$$

und daher (S. 211, Ungl. (5), (6)):

(7) $$a_\nu < G_0 \text{ für } jedes \ \nu \geqq 0, \quad G_0 - \varepsilon < a_{m_k} < G_0 \text{ etwa für: } k \geqq n.$$

Ist G_0 ein *unendlich oft vorkommendes reales Maximum*, so bestehen zunächst wiederum die Gleichungen (5). Andererseits enthält dann die Folge *unendlich viele* Glieder:

(8) $$a_{m_0} = a_{m_1} = \cdots = a_{m_k} = \cdots = G_0 \quad (\text{also auch: } G_0 = \lim_{k\to\infty} a_{m_k}),$$

während *im übrigen* durchweg $a_\nu < G_0$ ausfällt. Man hat also in diesem Falle:

(9) $$a_\nu \leqq G_0 \text{ für } jedes \ \nu \geqq 0, \quad G_0 - \varepsilon < a_{m_k} = G_0 \text{ für } k \geqq 0.$$

Durch Kombination von (7) und (9) ergeben sich unter den als Fall I zusammengefaßten Voraussetzungen, wenn man noch L statt G_0 schreibt, die Beziehungen:

(10) $$a_\nu \leqq L \text{ für jedes } \nu \geqq 0, \quad L - \varepsilon < a_{m_k} \leqq L \text{ für } k \geqq n,$$

sodaß also die Forderungen (1) *a fortiori* erfüllt sind.

Im übrigen ist für den vorliegenden Fall als charakteristisch hervorzuheben, daß hier der *obere Limes* L der Folge mit deren *oberer Grenze* G_0 zusammenfällt.

Fall II. Hat die Gesamtfolge (a_ν) weder ein ideales, noch ein unendlich oft vorkommendes reales Maximum, so muß sie ein *reales* Maximum besitzen, das nur in endlicher Anzahl vorkommt, also durch Weglassung einer endlichen Anzahl von Anfangsgliedern beseitigt werden kann. Die zunächst übrigbleibende Folge oder, wenn nicht, die schließlich nach ein- oder mehrmaliger Beseitigung weiterer realer Maxima übrigbleibende Folge $(a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \cdots)$ kann dann möglicherweise wieder die im Falle I vorhandene Beschaffenheit haben, d. h. das *ideale* oder *unendlich oft vorkommende reale* Maximum G_m besitzen. An die Stelle der Beziehung (5) tritt dann eine von der folgenden Form:

(11) $$G_0 \geqq G_1 \geqq \cdots \geqq G_{m-1} \geqq G_m = G_{m+1} = \cdots = G_\nu = \cdots\cdots,$$
$$\text{also: } L = \lim_{\nu\to\infty} G_\nu = G_m.$$

Im übrigen bleibt dann alles genau wie im Falle I, mit dem einzigen Unterschiede, daß der Index $\nu = m$ jetzt dieselbe Rolle spielt, wie dort der Index $\nu = 0$, d. h. man hat:

(12) $a_\nu \leqq L$ für $\nu \geqq m$, $L - \varepsilon < a_{m_k} \leqq L$ für unendlich viele Glieder a_{m_k},

welche (wie in (6)) eine monoton zunehmende oder (wie in (8)) eine aus lauter gleichen Zahlen bestehende Folge bilden.[1])

Der *obere Limes* ist also in dem vorliegenden Falle identisch mit der *oberen Grenze* einer durch Weglassung einer *endlichen* Anzahl von Anfangsgliedern aus der ursprünglich gegebenen hervorgehenden Folge.[2])

Fall III. Einen von der *oberen Grenze* wesentlich verschiedenen Charakter besitzt der *obere Limes* in dem einzigen noch möglichen Falle (sc. bei Folgen mit endlich bleibenden Gliedern), nämlich wenn die Folge, mag man auch noch so viele Anfangsglieder weglassen, immer wieder ein *reales*, in *endlicher* Anzahl vorkommendes Maximum besitzt (z. B. $a_\nu = (-1)^\nu \frac{\nu + 2}{\nu + 1}$). Diese Maxima müssen dann offenbar eine *beständig abnehmende* Folge bilden, etwa:

(13) $$a_{m_0} > a_{m_1} > \cdots > a_{m_k} > \cdots\cdots.$$

Dabei mag a_{m_k} $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ immer das *letzte* Glied der Folge bedeuten, welches den betreffenden Maximalwert noch erreicht, sodaß also für die obere Grenze G_{m_k} der Folge $(a_{m_k}, a_{m_k+1}, a_{m_k+2}, \cdots)$ noch die Beziehung gilt:

(14) $$G_{m_k} = a_{m_k},$$

wogegen schon:

$$G_{m_k+1} < a_{m_k}, \quad \text{nämlich:} \ = a_{m_{k+1}},$$

und daher durchweg:

(15) $$a_\nu < a_{m_k} \quad \text{für} \quad \nu > m_k.$$

---

1) Man hat also auch hier (vgl. (6) und (8)):

$$L = \lim_{k \to \infty} a_{m_k}.$$

2) Dabei kann der besondere Fall eintreten, daß $G_m = G_{m-1}$, d. h. daß das *ideale* Maximum der Folge $(a_m, a_{m+1}, \cdots)$ mit dem letzten *realen* Maximum $G_{m-1} = a_{m-1}$ zusammenfällt. Ist dann speziell $G_{m-1} = G_0$, d. h. tritt der Fall I schon nach Beseitigung des *ersten* realen Maximums ein, so hat man auch hier noch $L = G_0$ (also den *oberen Limes* gleich der *oberen Grenze* der *Gesamt*folge). Beispiel: $a_\nu = (-1)^\nu \left(1 - \frac{\nu}{2^\nu}\right)$, also $a_0 = 1$, sonst durchweg $a_\nu < 1$, dagegen $\overline{\lim\limits_{\nu \to \infty}} a_\nu = 1$. Die mit a_0 beginnende Folge hat also das (*einmal* vorkommende) *reale* Maximum 1, die mit a_1 beginnende das *ideale* Maximum 1.

Die zur Definition von L dienliche Folge der G_ν $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ zeigt also hier den folgenden Verlauf:

$$G_0 = \cdots = G_{m_0} > G_{m_0+1} = \cdots = G_{m_1} > G_{m_1+1} = \cdots$$
$$\cdots = G_{m_k} > G_{m_k+1} = \cdots = G_{m_{k+1}} > \cdots\cdots \text{[1]},$$

und da die aus dieser Folge herausgehobene Folge der durchweg *verschiedenen* Glieder, nämlich:

$$G_{m_0} > G_{m_1} > \cdots > G_{m_k} > \cdots\cdots,$$

nach Gl. (14) mit der Folge (13) *identisch* ist, so findet man:

$$(16) \qquad L = \lim_{\nu \to \infty} G_\nu = \lim_{k \to \infty} a_{m_k}.$$

Daraus folgt aber, da die Folge der a_{m_k} eine monoton *abnehmende* ist, daß:

$$(17\text{a}) \qquad L < a_{m_k} < L + \varepsilon \quad \text{etwa für} \quad m_k \geqq m,$$

und daher nach Ungl. (15) auch:

$$(17\text{b}) \qquad a_\nu < L + \varepsilon \quad \text{für } \textit{jedes} \quad \nu \geqq m,$$

sodaß also die Forderungen (1) wiederum *a fortiori* erfüllt sind.[2]) —

Der entsprechende Beweis für den *unteren* Limes l kann in ganz analoger Weise geführt werden, indem man zunächst setzt:

$$(18) \qquad \lim_{\nu \to \infty} g_\nu = l,$$

wo g_ν die *untere* Grenze der Folge $(a_\nu, a_{\nu+1}, a_{\nu+2}, \cdots)$ bedeutet und mit wachsendem ν *niemals abnimmt.* Oder kürzer, indem man zeigt, daß der *untere* Limes der Folge (a_ν) identisch ist mit dem *negativ* genommenen *oberen* Limes der Folge $(-a_\nu)$. Bezeichnet man nämlich diesen letzteren

---

1) Dabei kann sich natürlich eine Gliedergruppe von der Form:

$$G_{m_k+1} = \cdots = G_{m_{k+1}}$$

auf das einzige Glied $G_{m_{k+1}}$ reduzieren, wenn nämlich $m_{k+1} = m_k + 1$, d. h. wenn *unmittelbar* hinter dem letzten Maximalgliede a_{m_k} einer solchen Gliedergruppe das nächst-kleinere Maximum $a_{m_{k+1}}$ auftritt und dieses nur ein einziges Mal vorkommt.

2) Man bemerke, daß der *obere Limes* durch Weglassung einer beliebigen *endlichen* Anzahl von Gliedern *niemals* eine Änderung erleidet, während dies für die *obere Grenze*, abgesehen von dem Falle I, wo sie mit dem oberen Limes zusammenfällt, bei Weglassung einer genügenden Anzahl von Gliedern *stets* eintritt. — Das analoge gilt bezüglich des *unteren Limes* und der *unteren Grenze*.

mit L', so bestehen für L' und die Glieder der Folge $(-a_\nu)$ auf Grund der definierenden Ungleichungen (1) Beziehungen von der Form:

$$-a_\nu < L' + \varepsilon \quad \text{für } \textit{jedes} \quad \nu \geqq n, \qquad L' - \varepsilon < -a_{n_k} < L' + \varepsilon$$

für eine unbegrenzte Folge natürlicher Zahlen n_k, also:

$$a_\nu > -L' - \varepsilon \quad \text{für } \textit{jedes} \quad \nu \geqq n, \qquad -L' + \varepsilon > a_{n_k} > -L' - \varepsilon,$$

und daher, wenn man $-L' = l$ setzt und die vorstehenden Ungleichungen umkehrt:

(19) $a_\nu > l - \varepsilon$ für *jedes* $\nu \geqq n$, $l - \varepsilon < a_{n_k} < l + \varepsilon$ für *unendlich viele* n_k,

womit die ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

2. Da $\lim\limits_{k\to\infty} a_{m_k} = L$, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = l$ (wie aus der *zweiten* der Ungleichungen (1), (2) mit Hilfe einer einfachen Modifikation[1]) gefolgert werden kann, überdies in bezug auf L bereits ausdrücklich hervorgehoben wurde — s. Gl. (6), (8), (16)), so läßt sich mit Rücksicht auf die getroffene Auswahl der a_{m_k} (s. (6), (8), (13)) und die daraus nach Analogie resultierende der a_{n_k} das vorstehende Ergebnis auch folgendermaßen formulieren:

Aus jeder Zahlenfolge (a_ν) mit endlich bleibenden Gliedern lassen sich zwei monotone Zahlenfolgen (a_{m_k}), (a_{n_k}) mit den Grenzwerten

(20) $$\lim_{k\to\infty} a_{m_k} = L, \qquad \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = l$$

herausheben, und es läßt sich sodann jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n so zuordnen, daß:

(21) $$l - \varepsilon < a_\nu < L + \varepsilon \quad \text{für:} \quad \nu \geqq n.$$

Daraus folgt weiter, daß sich aus der Folge (a_ν) *keine* Teilfolge (a_{p_ν}) herausheben läßt, welche einen *größeren* Limes als L oder einen *kleineren* als l besitzt. Man kann daher (mit Cauchy) L auch als den *größten*, l als den *kleinsten* zur Folge (a_ν) gehörigen Limes bezeichnen. Zugleich erkennt man (immer wieder mit Hilfe des Beweisprinzips von § 26, Nr. 1, S. 161), daß es tatsächlich nur *eine einzige* Zahl L bzw. l der fraglichen Art gibt, und zwar ist allemal:

(22) $$l \leqq L \quad \text{d. h.} \quad \underline{\lim}_{\nu\to\infty} a_\nu \leqq \overline{\lim}_{\nu\to\infty} a_\nu.$$

---

1) Man hat die unbegrenzt verkleinerungsfähige Zahl ε durch das allgemeine Glied ε_k einer monoton abnehmenden, null-konvergenten Folge zu ersetzen, sodaß an die Stelle jener einzelnen Ungleichungen je ein unbegrenztes System von folgender Form tritt:

$$\left.\begin{aligned} L - \varepsilon_k < a_{m_k} < L + \varepsilon_k \\ l - \varepsilon_k < a_{n_k} < l + \varepsilon_k \end{aligned}\right\} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

Übrigens hat man auch, wie die Herleitung zeigt, stets: $l \geqq g$, $L \leqq G$, wenn wieder g und G die *untere* bzw. *obere Grenze* der a_ν bedeutet.

3. Hat die Folge (a_ν) einen *bestimmten Grenzwert* $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = a$, so hat man:

$$(23) \qquad a - \varepsilon < a_\nu < a + \varepsilon \quad \text{etwa für} \quad \nu \geqq n.$$

Die Vergleichung mit den Beziehungen (1) und (2) zeigt dann unmittelbar, daß in diesem Falle $L = l = a$.

Umgekehrt: Ist $L = l$, so folgt aus (1) und (2), daß:

$$(24) \qquad l - \varepsilon < a_\nu < l + \varepsilon \quad \text{etwa für} \quad \nu \geqq n',$$

und daher:

$$(25) \qquad \lim_{\nu \to \infty} a_\nu = l \ (= L).$$

Also:

Ist die Folge (a_ν) konvergent, so fallen die beiden Hauptlimites mit dem früher definierten Limes zusammen; umgekehrt: liefern die beiden Hauptlimites dieselbe Zahl a, so konvergiert auch die Folge (a_ν) gegen den Grenzwert a.

Im Anschlusse hieran sagt man zuweilen von einer Folge mit den *verschiedenen* Hauptlimites L, l: *ihr Limes* sei zwar *endlich*, aber *unbestimmt* (oder auch: *er schwanke*) in den Grenzen l und L. Wir wollen dieses Verhalten prägnanter durch die Bezeichnung ausdrücken:

$$(26) \qquad l \leqq \overline{\underline{\lim}}_{\nu \to \infty} a_\nu \leqq L,$$

indem wir allgemein dem Symbole $\overline{\underline{\lim}}$ die Bedeutung beilegen: in dem betreffenden Zusammenhange steht es frei, sowohl $\overline{\lim}$ als $\underline{\lim}$ einzusetzen. Darnach ist also insbesondere die Beziehung:

$$(27) \qquad \overline{\underline{\lim}}_{\nu \to \infty} a_\nu = a$$

gleichbedeutend mit:

$$(28) \qquad \lim_{\nu \to \infty} a_\nu = a.$$

Man darf ferner an Stelle von:

$$(29) \qquad \overline{\lim_{\nu \to \infty}} a_\nu \leqq a \quad \text{bzw.} \quad \underline{\lim}_{\nu \to \infty} a_\nu \geqq a$$

auf Grund von Ungl. (22) auch schreiben:

$$(30) \qquad \overline{\underline{\lim}}_{\nu \to \infty} \leqq a \quad \text{bzw.} \quad \overline{\underline{\lim}}_{\nu \to \infty} a_\nu \geqq a,$$

da aus $\overline{\lim\limits_{\nu \to \infty}} a_\nu \leqq a$ folgt, daß *a fortiori* $\underline{\lim}\limits_{\nu \to \infty} a_\nu \leqq a$, ebenso aus $\underline{\lim}\limits_{\nu \to \infty} a_\nu \geqq a$, daß auch $\overline{\lim\limits_{\nu \to \infty}} a_\nu \geqq a$.

Schließlich bemerke man noch, daß aus:

(31) $$a_\nu < b_\nu < c_\nu$$

offenbar folgt:

(32) $$\underline{\lim}_{\nu\to\infty} a_\nu \leqq \underline{\lim}_{\nu\to\infty} b_\nu \leqq \overline{\lim}_{\nu\to\infty} b_\nu \leqq \overline{\lim}_{\nu\to\infty} c_\nu .$$

4. Lassen wir auch hier wieder die Beschränkung fallen, daß die $|a_\nu|$ stets unter einer endlichen Zahl bleiben sollen, so kann zunächst wiederum der Fall eintreten, daß unter den Gliedern a_ν *positive* (in unbegrenzter Anzahl) vorkommen, welche schließlich jede noch so große positive Zahl übersteigen. Alsdann tritt an die Stelle der Beziehungen (1) eine solche von der Form:

(33) $$a_{m_k} > A$$

(d. h. zu jedem noch so großen $A > 0$ existiert eine unbegrenzte Teilfolge (a_{m_k}), deren Glieder der Ungleichung (18) genügen). Wir bezeichnen in diesem Falle $+\infty$ als den *oberen Limes* (wie auch nach § 35 als *obere Grenze*) der Folge (a_ν), in Zeichen:

(34) $$\overline{\lim}_{\nu\to\infty} a_\nu = +\infty .$$

Enthält die Folge nicht auch *negative* Glieder, deren absolute Beträge jede noch so große positive Zahl übersteigen, so hat ihr *unterer Limes* entweder einen bestimmten *endlichen* Wert[1]), oder, wenn nicht, so bezeichnen wir ihn *gleichfalls* mit $+\infty$, nämlich dann, wenn die Folge von irgendeiner Stelle ab *ausschließlich* aus *positiven* Gliedern besteht, die jedes beliebig vorgeschriebene $A > 0$ übersteigen, mit anderen Worten, wenn:

(35) $$\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = +\infty ,$$

und wir setzen in diesem Falle nach Analogie von Gl. (25):

(36) $$\underline{\lim}_{\nu\to\infty} a_\nu = \overline{\lim}_{\nu\to\infty} a_\nu = +\infty .$$

Analog ergibt sich:

(37) $$\underline{\lim}_{\nu\to\infty} a_\nu = -\infty ,$$

wenn die Folge *negative* Glieder enthält, deren absolute Beträge jede noch so große Zahl übersteigen; und man hat auch noch:

(38) $$\overline{\lim}_{\nu\to\infty} a_\nu = -\infty \quad \text{gleichzeitig mit:} \quad \lim_{\nu\to\infty} a_\nu = -\infty .$$

---

1) Beipiel: $a_\nu = \nu^{(-1)^\nu}$.

$$\overline{\lim}_{\nu\to\infty} a_\nu = +\infty, \quad \underline{\lim}_{\nu\to\infty} a_\nu = 0 .$$

Schließlich kann auch noch der Fall eintreten:

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}}\, a_\nu = +\infty, \quad \underline{\lim_{\nu \to \infty}}\, a_\nu = -\infty, \tag{39}$$

nämlich dann, wenn die Folge sowohl *positive* als *negative* Glieder enthält, welche numerisch jede noch so große positive Zahl übersteigen.

Wir werden uns gelegentlich der Bezeichnungsweise bedienen:

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}}\, a_\nu < \infty \quad \text{oder auch:} \quad \lim_{\nu \to \infty} a_\nu < \infty \quad \text{(lies: \textit{nicht} unendlich)}, \tag{40}$$

um auszudrücken, daß der *obere Limes* bzw. der *Limes* schlechthin unter einer endlichen positiven Zahl bleibt.

Die Gesamtheit der Zahlen x, welche der Bedingung genügen:

$$\underline{\lim_{\nu \to \infty}}\, a_\nu \leqq x \leqq \overline{\lim_{\nu \to \infty}}\, a_\nu,$$

soll als das *Grenzintervall* der a_ν bezeichnet werden.

Zahlenfolgen mit *zwei verschiedenen Hauptlimites* bezeichnen wir als *uneigentlich divergente*. Die *konvergenten* und *eigentlich divergenten* Folgen sind dann andererseits dadurch charakterisiert, daß für sie *ein einziger* (nämlich endlicher bzw. mit bestimmtem Vorzeichen unendlicher) *Limes* existiert.

5. Der *Limes* bzw. die *Hauptlimites* einer Zahlenfolge (a_ν) lassen sich noch als besondere Fälle eines *allgemeineren* Begriffes darstellen.

Ist irgendeine unbegrenzte Menge von Zahlen α (unter denen sich beliebig viele einander *gleiche* befinden dürfen) vorgelegt, so soll eine bestimmte Zahl A eine *Grenz-* oder *Häufungszahl* der Zahlen α heißen, wenn unbegrenzt viele Zahlen α der Bedingung genügen: $|A - \alpha| < \varepsilon$, wie klein auch die positive Zahl ε angenommen werden mag. Dabei ist es vollkommen *gleichgültig*, ob A unter den Zahlen α selbst *vorkommt oder nicht*. Andererseits ist A offenbar stets als *Häufungszahl* der α zu betrachten, wenn A unter den Zahlen α *unendlich oft* vorkommt: denn in diesem Falle besteht für *unendlich viele* α die Beziehung: $|A - \alpha| = 0$, also *a fortiori* $|A - \alpha| < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$.

Gibt es unter den Zahlen α *positive*, die jede noch so große Zahl übersteigen (und die dann *eo ipso* in *unbegrenzter* Anzahl vorhanden sein müssen), bzw. *negative*, die numerisch jede noch so große Zahl übersteigen, so bezeichnet man (nach analoger Terminologie, wie bei den Begriffen „Limes“ und „Grenze“) $+\infty$ bzw. $-\infty$ als *Häufungszahl* der α.

Auf Grund dieser Definition ist der *Limes* einer *konvergenten* oder *eigentlich divergenten* Zahlenfolge (a_ν) stets eine *Häufungszahl* der a_ν und zwar *die einzige.* Denn ist etwa $\lim_{\nu \to \infty} a_\nu = a$ eine bestimmte Zahl, so genügen *alle* a_ν, von einem passend bestimmten Index $\nu = n$ anfangend, einer Beziehung von der Form $|a - a_\nu| < \varepsilon$ und andererseits gibt es auch nur *eine* Zahl, für welche eine derartige Beziehung existiert (nach § 26, Nr. 1, S. 161). Entsprechend hat man im Falle $\lim_{\nu \to \infty} a_\nu = +\infty$ bzw. $-\infty$ für *alle* a_ν, von einem gewissen Index $\nu = n$ anfangend, eine Beziehung von der Form: $a_\nu > A$ bzw. $< -A$, also die *einzige* Häufungszahl $+\infty$ bzw. $-\infty$.

Hat die Folge (a_ν) zwei *verschiedene Hauptlimites* L, l (wobei eventuell auch $L = +\infty$, $l = -\infty$ sein kann), so stellt offenbar *jeder* derselben eine Häufungszahl der a_ν, die Folge besitzt also deren *mindestens zwei.* Gibt es dann, falls etwa L, l *endlich* sind, für *irgendein* $\varepsilon > 0$ noch *unendlich viele* a_ν, welche *keiner* der beiden Bedingungen $|L - a_\nu| < \varepsilon$, $|l - a_\nu| < \varepsilon$ genügen[1]), so besitzen diese *entweder* einen bestimmten *Limes* oder zwei verschiedene *Hauptlimites* L', l', und die Folge der a_ν hat somit *eine* bzw. *zwei* weitere Häufungszahlen. Im letzteren Falle kann es dann wiederum noch *unendlich viele* a_ν geben, welche *keiner* Bedingung von der Form $|L' - a_\nu| < \varepsilon$ oder $|l' - a_\nu| < \varepsilon$ genügen usf. Man erkennt auf diese Weise, daß eine Zahlenfolge *beliebig*, d. h. eventuell auch *unendlich viele Häufungszahlen* besitzen kann. Es kann sogar, wie wir an zwei, auch für später bemerkenswerten Beispielen zeigen wollen, *jedes* a_ν eine *Häufungszahl* der Folge (a_ν) sein und diese selbst noch *unendlich viele andere* (d. h. unter den a_ν *nicht* vorkommende) *Häufungszahlen* besitzen.

6. Beispiel I. Die *Gesamtheit* der positiven *rationalen echten Brüche* kann als einfache *Zahlenfolge* entweder als Teilmenge der positiven rationalen Zahlen nach dem in § 25, Nr. 3 (S. 151) gezeigten Anordnungsprinzip oder noch etwas einfacher in folgender Weise angeschrieben werden:

$$(41) \qquad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\ldots,$$

wobei in jeder Gruppe von der Form $\left(\frac{1}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}\right)$ nur diejenigen Brüche aufzunehmen sind, deren Zähler *relativ prim* zu n. Denn haben

1) Im Falle $L = +\infty$, bzw. $l = -\infty$ treten an die Stelle dieser Bedingungen wiederum solche von der Form: $a_\nu > G$, bzw. $a_\nu < -G$.

m und n den (von 1 verschiedenen) größten gemeinsamen Teiler d, sodaß etwa: $m = m' \cdot d$, $n = n' \cdot d$, wo jetzt m', n' *relativ prim*, so kommt der Bruch $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ schon in derjenigen früheren Gruppe vor, welche durch den Nenner $n' < n$ charakterisiert ist.

Die Folge (41) enthält alsdann offenbar *jede rationale*, zwischen 0 und 1 gelegene Zahl *einmal* und *nur* einmal. Da sie solche Zahlen enthält, welche der 1 und der 0 *beliebig nahe* kommen, aber *keine*, welche 1 *übersteigen* oder unter 0 *herabsinken*, so hat man:

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, a_\nu = 1, \quad \underline{\lim_{\nu\to\infty}}\, a_\nu = 0. \tag{42}$$

Die Folge besitzt also zunächst die beiden ihr nicht angehörigen Häufungszahlen 1 und 0. Bedeutet dann ferner $\frac{p}{q}$ einen beliebigen positiven *echten Bruch* (der also in der Folge (a_ν) sicher einmal vorkommt) und wird $\varepsilon > 0$ beliebig klein $\left(\text{zum mindesten } \leqq \frac{p}{q} \text{ und } \leqq 1 - \frac{p}{q}\right)$ vorgeschrieben, so liegen allemal zwischen $\frac{p}{q} - \varepsilon$ und $\frac{p}{q} + \varepsilon$ *unendlich viele* echte Brüche, also *unendlich viele* a_ν (z. B. alle möglichen von der Form $\frac{p}{q} \pm \frac{1}{m+\lambda}$, wo $\lambda = 1, 2, 3, \cdots$, und $\frac{1}{m} \leqq \varepsilon$). Somit ist $\frac{p}{q}$, d. h. schließlich *jede* der Zahlen a_ν eine *Häufungszahl* der Folge.

Das gleiche gilt aber schließlich auch noch von *jeder* zwischen 0 und 1 gelegenen *Irrationalzahl* A. Denn wird wiederum $\varepsilon > 0$ beliebig klein (zum mindesten $\leqq A$ und $\leqq 1 - A$) vorgeschrieben, so läßt sich zunächst eine *rationale* Zahl a so fixieren, daß:

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < A < a + \frac{\varepsilon}{2}$$

(s. § 24, Nr. 2, S. 145). Da hieraus folgt:

$$a + \frac{\varepsilon}{2} < A + \varepsilon, \quad A - \varepsilon < a - \frac{\varepsilon}{2},$$

d. h.:

$$A - \varepsilon < a - \frac{\varepsilon}{2} < a + \frac{\varepsilon}{2} < A + \varepsilon,$$

so liegen daher auch zwischen $A - \varepsilon$ und $A + \varepsilon$ *unendlich viele rationale* Zahlen, also *unendlich viele* a_ν.

Beispiel II. Man hebe aus der eben betrachteten Folge diejenige Folge (a_ν') heraus, welche nur alle möglichen *dyadischen* (echten) Brüche,

d. h. diejenigen mit Nennern von der Form 2^{μ} $(\mu = 1, 2, 3, \cdots)$ enthält, also:

$$(43) \qquad \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{3}{2^2}, \cdots, \frac{1}{2^m}, \frac{3}{2^m}, \cdots, \frac{2^m - 1}{2^m}, \cdots,$$

oder auch, in *dyadischer Schreibweise* (§ 15, Nr. 2, S. 95):

$$(43\text{a}) \qquad 0{,}1,\ 0{,}01,\ 0{,}11,\ 0{,}001,\ 0{,}011,\ 0{,}101,\ 0{,}111, \cdots\cdot$$

(die m^{te} Gruppe besteht aus den 2^{m-1} nach aufsteigender Größe geordneten m-stelligen dyadischen Brüchen). Man hat dann, genau wie oben, zunächst:

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}}\, a_{\nu}' = 1, \quad \underline{\lim_{\nu \to \infty}}\, a_{\nu}' = 0.$$

Bedeutet ferner $a' = 0, c_1 c_2 \cdots c_m$ *irgendeinen* der Brüche (43a) (wobei also $c_m = 1$, im übrigen, für $\nu < m$, $c_{\nu} = 0$ oder 1) und wird $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, so bestimme man ein $n \geqq m$ *so*, daß $\frac{1}{2^n} \leqq \varepsilon$. *Jeder* Bruch von der Form:

$$b' = 0, c_1 c_2 \cdots c_m 0_{m+1} \cdots 0_n c_{n+1} \cdots c_{n+k}$$

(wo $0_{m+1}, \cdots, 0_n$ bloße *Nullen* bedeuten, während der betreffende *Index* lediglich die *Stellenzahl* markieren soll) hat dann die Eigenschaft, daß:

$$0 < b' - a' = 0, 0_1 0_2 \cdots 0_n c_{n+1} \cdots c_{n+k} < \frac{1}{2^n}, \quad \text{also} \quad < \varepsilon.$$

(Entsprechend ergibt sich übrigens, wenn:

$$b'' = 0, c_1 c_2 \cdots c_{m-1} 0_m 1_{m+1} \cdots 1_n c_{n+1} \cdots c_{n+k}$$

gesetzt wird:

$$0 < a' - b'' < \frac{1}{2^n}\Big)\cdot$$

Somit ist a', also *jede* der Zahlen a_{ν}' eine *Häufungszahl* der Folge (a_{ν}').

Das letztere gilt aber schließlich auch von jedem *nicht-dyadischen*[1]) *echten Bruche* a, sowie von jeder zwischen 0 und 1 gelegenen *Irrationalzahl* A. Denn denkt man sich a bzw. A durch einen *unbegrenzten dyadischen* Bruch dargestellt (welcher nach § 20, Nr. 1, S. 117 für a *periodisch*, nach § 24, Nr. 3, S. 145 für A *nicht-periodisch* ausfällt), so gibt es, *wie groß* auch n angenommen werde, unter den Brüchen (43a) *unendlich viele*, welche mit a bzw. A *die ersten* n *Bruchstellen gemeinsam* haben und sich somit von a bzw. A um weniger als $\frac{1}{2^n}$ unterscheiden.

---

1) d. h. von jedem nicht durch einen *begrenzten* dyadischen Bruch darstellbaren.

§ 37. Grenzwerte von der Form: $\lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu}{b_\nu}$, wo: $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = \lim\limits_{\nu\to\infty} b_\nu = \pm\infty$ oder $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = \lim\limits_{\nu\to\infty} b_\nu = 0$. — Unendliche und Nullen verschiedener Ordnung. — Die Bezeichnungen: $\succ, \prec, \cong, \sim$.

1. Ist: $\lim\limits_{\nu\to\infty} b_\nu = \pm\infty$ oder $\lim\limits_{\nu\to\infty} b_\nu = 0$, so besitzt ein Ausdruck von der Form: $\dfrac{\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} a_\nu}{\lim\limits_{\nu\to\infty} b_\nu}$ *an sich keinen bestimmten Sinn*, wie auch im übrigen die Folge (a_ν) beschaffen sein mag. Dagegen kann sehr wohl der Ausdruck: $\lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu}{b_\nu}$ eine *bestimmte Zahl* oder ∞ *mit bestimmtem Vorzeichen* vorstellen[1]), in welchem Falle man dann wohl auch $\lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu}{b_\nu}$ nicht sehr passend als den *„wahren Wert"* von $\dfrac{\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu}{\lim\limits_{\nu\to\infty} b_\nu}$ zu bezeichnen pflegte und zuweilen noch bezeichnet.

Bleiben z. B. die a_ν *zwischen zwei endlichen Schranken* (sodaß also $\underline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} a_\nu$, $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} a_\nu$ nicht unendlich ausfallen), so hat man offenbar:

$$(1) \qquad \lim_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu}{b_\nu} = 0, \quad \text{wenn: } \lim_{\nu\to\infty} b_\nu = +\infty \text{ oder } = -\infty.$$ [2])

Liegen die a_ν zum mindesten für $\nu \geqq m$ *über* einer *positiven* Zahl (sodaß also auch: $\underline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} a_\nu > 0$), so hat man analog:

$$(2) \qquad \lim_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu}{b_\nu} \begin{cases} = +\infty, & \text{wenn: } b_\nu > 0,\ \lim\limits_{\nu\to\infty} b_\nu = 0, \\ = -\infty, & \text{wenn: } b_\nu < 0,\ \lim\limits_{\nu\to\infty} b_\nu = 0. \end{cases}$$

Aber auch in *dem* Falle, daß $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu$ und $\lim\limits_{\nu\to\infty} b_\nu$ *gleichzeitig* $= \pm\infty$ bzw. $= 0$ werden (wobei dann $\dfrac{\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu}{\lim\limits_{\nu\to\infty} b_\nu}$ unter der sogenannten *„unbestimmten*

---

1) Von den Ausdrücken: $\underline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\frac{a_\nu}{b_\nu}$, $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\frac{a_\nu}{b_\nu}$ gilt dies selbstverständlich in *jedem* Falle.

2) Es würde sogar genügen, daß:

$$\lim_{\nu\to\infty} |b_\nu| = +\infty,$$

wobei dann noch:

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, b_\nu = +\infty, \quad \underline{\lim_{\nu\to\infty}}\, b_\nu = -\infty$$

sein könnte.

Form“ $\frac{\infty}{\infty}$ bzw. $\frac{0}{0}$ erscheinen würde, d. h. *an sich überhaupt keinen Sinn hat*), kann $\lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu}{b_\nu}$ einen wohldefinierten Sinn besitzen. Ist z. B.:

$$(3)\qquad a_\nu = a_\nu' \cdot \omega_\nu, \quad b_\nu = b_\nu' \cdot \omega_\nu,$$

wo ω_ν für jedes einzelne ν eine bestimmte Zahl vorstellt, dagegen $\lim\limits_{\nu\to\infty}\omega_\nu = \pm\infty$, so hat man, wenn etwa a_ν', b_ν' zum mindesten für $\nu \geqq m$ zwischen zwei positiven Zahlen bleiben:

$$(3a)\qquad \lim_{\nu\to\infty} a_\nu = \pm\infty, \quad \lim_{\nu\to\infty} b_\nu = \pm\infty,$$

und andererseits:

$$(3b)\qquad \frac{a_\nu}{b_\nu} = \frac{a_\nu'}{b_\nu'}, \quad \text{also:}\quad \overline{\underline{\lim_{\nu\to\infty}}}\,\frac{a_\nu}{b_\nu} = \overline{\underline{\lim_{\nu\to\infty}}}\,\frac{a_\nu'}{b_\nu'},$$

wo jetzt $\left(\frac{a_\nu'}{b_\nu'}\right)$ eine aus endlich bleibenden positiven Zahlen bestehende, möglicherweise konvergente Folge vorstellt.

Analog ergibt sich im Falle:

$$(4)\qquad a_\nu = a_\nu' \cdot \delta_\nu, \quad b_\nu = b_\nu' \cdot \delta_\nu, \quad \text{wo:}\ \lim_{\nu\to\infty}\delta_\nu = 0,$$

sofern die $|a_\nu'|$, $|b_\nu'|$ zwischen zwei positiven Zahlen bleiben:

$$(4a)\qquad \lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0, \quad \lim_{\nu\to\infty} b_\nu = 0,$$

$$(4b)\qquad \frac{a_\nu}{b_\nu} = \frac{a_\nu'}{b_\nu'}, \quad \overline{\underline{\lim_{\nu\to\infty}}}\,\frac{a_\nu}{b_\nu} = \overline{\underline{\lim_{\nu\to\infty}}}\,\frac{a_\nu'}{b_\nu'}.$$

Beispiele:

Zu (1): $a_\nu = (-1)^\nu + \frac{1}{\nu}, \qquad b_\nu = \nu$ oder $b_\nu = (-1)^\nu \cdot \nu, \quad \lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu}{b_\nu} = 0.$

Zu (2): $a_\nu = 2 + (-1)^\nu \cdot \frac{\nu - 1}{\nu}, \quad b_\nu = \left(\frac{1}{2}\right)^\nu, \quad \lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu}{b_\nu} = +\infty.$

Zu (3): $$\left.\begin{aligned} a_\nu &= \nu - 1 = \nu\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) \\ b_\nu &= \nu + 1 = \nu\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \end{aligned}\right\} \lim_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu}{b_\nu} = \lim_{\nu\to\infty}\frac{1 - \frac{1}{\nu}}{1 + \frac{1}{\nu}} = 1.$$

Zu (4): $$\left.\begin{aligned} a_\nu &= \frac{\nu - 1}{\nu^2} = \frac{1}{\nu}\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) \\ b_\nu &= \frac{\nu + 1}{\nu^2} = \frac{1}{\nu}\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \end{aligned}\right\} \lim_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu}{b_\nu} = 1.$$

2. Zwischen Grenzwerten von der Form $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\frac{a_\nu}{b_\nu}$ und $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{b_\nu - b_{\nu-1}}$ besteht im Falle $\lim\limits_{\nu\to\infty} b_\nu = \pm\infty$ eine merkwürdige Beziehung[1]), zu deren Herleitung wir den folgenden *Hilfssatz*[2]) voranschicken:

Bedeutet (M_ν) *eine* ***monoton zunehmende Folge*** *mit dem Grenzwerte* ∞, *und ist:*

$$(5)\qquad a < \frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{M_\nu - M_{\nu-1}} < A, \quad \textit{zum mindesten für } \nu > m,$$

so läßt sich zu jedem (noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ *ein* n *so fixieren, daß:*

$$(6)\qquad a - \varepsilon < \frac{a_\nu}{M_\nu} < A + \varepsilon \quad \textit{für} \quad \nu > n.$$

---

1) Die entsprechende Beziehung mit den zugehörigen Folgerungen für den Fall $\lim\limits_{\nu\to\infty} b_\nu = 0$ hat für die *Zahlen*lehre geringere Bedeutung: sie kommt (abgesehen von einer in § 49 zu machenden Anwendung) in passend modifizierter Gestalt hauptsächlich erst für die *Funktionen*lehre in Betracht. Wir wollen sie deshalb im folgenden *unter* dem Texte anführen.

2) Der Parallelsatz für den Fall $\lim\limits_{\nu\to\infty} b_\nu = 0$ lautet:

Sind die m_ν *positiv und* ***monoton abnehmend***, $\lim\limits_{\nu\to\infty} m_\nu = 0$, *außerdem auch noch* $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$, *und ist:*

$$(5\text{a})\qquad a < \frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{m_\nu - m_{\nu-1}} < A \quad \textit{für} \quad \nu > m,$$

so hat man:

$$(6\text{a})\qquad a \leqq \frac{a_\nu}{m_\nu} \leqq A \quad \textit{für} \quad \nu \geqq m.$$

Beweis. Wegen $m_{\nu-1} - m_\nu > 0$ folgt aus (5a):

$$(m_{\nu-1} - m_\nu)\, a < a_{\nu-1} - a_\nu < (m_{\nu-1} - m_\nu) A \quad (\nu > m).$$

Nimmt man $n \geqq m$ und substituiert der Reihe nach: $\nu = n+1,\ n+2, \cdots, n+\varrho$, so folgt durch Addition:

$$(m_n - m_{n+\varrho})\, a < a_n - a_{n+\varrho} < (m_n - m_{n+\varrho}) A \quad \text{für } n \geqq m \text{ und } \varrho = 1, 2, 3, \cdots.$$

Läßt man hier ϱ ins Unendliche wachsen, wobei dann $\lim\limits_{\varrho\to\infty} m_{n+\varrho} = \lim\limits_{\varrho\to\infty} a_{n+\varrho} = 0$ wird, so ergibt sich, wenn man schließlich noch ν statt n schreibt:

$$a \leqq \frac{a_\nu}{m_\nu} \leqq A \quad \text{für } \nu \geqq m, \quad \text{q. e. d.}$$

Beweis. Da $M_\nu - M_{\nu-1} > 0$, so folgt aus (5):

$$(M_\nu - M_{\nu-1})a < a_\nu - a_{\nu-1} < (M_\nu - M_{\nu-1})A \quad (\nu > m).$$

Setzt man hier der Reihe nach $\nu = m+1, m+2, \cdots, m+\varrho$ und addiert die resultierenden Ungleichungen, so ergibt sich:

$$(M_{m+\varrho} - M_m)\,a < a_{m+\varrho} - a_m < (M_{m+\varrho} - M_m)A \quad (\varrho = 1, 2, 3, \cdots),$$

und hieraus durch Division mit $M_{m+\varrho}$, wenn man zugleich noch ν statt $m+\varrho$ schreibt:

$$a + \frac{a_m - aM_m}{M_\nu} < \frac{a_\nu}{M_\nu} < A + \frac{a_m - AM_m}{M_\nu} \quad (\nu > m),$$

also *a fortiori:*

$$a - \frac{|a_m - aM_m|}{M_\nu} < \frac{a_\nu}{M_\nu} < A + \frac{|a_m - AM_m|}{M_\nu} \quad (\nu > m).$$

Wird jetzt $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, so kann man wegen $\lim\limits_{\nu\to\infty} M_\nu = \infty$, eine natürliche Zahl $n \geqq m$ so fixieren, daß:

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{|a_m - aM_m|}{M_\nu} \\[2ex] \dfrac{|a_m - AM_m|}{M_\nu} \end{matrix}\right\} \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu > n.$$

Alsdann wird aber:

$$a - \varepsilon < \frac{a_\nu}{M_\nu} < A + \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu > n, \quad \text{q. e. d.}$$

3. Aus dem eben bewiesenen Hilfssatze ziehen wir nun die nachstehenden *Folgerungen:*

I. Ist:

$$\varliminf_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{M_\nu - M_{\nu-1}} = l, \quad \varlimsup_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{M_\nu - M_{\nu-1}} = L,$$

so existiert (s. § 36, S. 217, Ungleichung (21)) zu jedem $\varepsilon > 0$ ein m, derart, daß:

$$l - \varepsilon < \frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{M_\nu - M_{\nu-1}} < L + \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu > m.$$

Mithin ergibt sich nach (5) und (6):

$$l - 2\varepsilon < \frac{a_\nu}{M_\nu} < L + 2\varepsilon \quad \text{für} \quad \nu > n.$$

Da hier ε beliebig klein genommen werden kann, so erhält man den Satz[1]):

Wachsen die M_ν mit ν monoton ins Unendliche, so hat man:

$$\underline{\lim}_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{M_\nu - M_{\nu-1}} \leqq \underline{\lim}_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu}{M_\nu} \leqq \overline{\lim}_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu}{M_\nu} \leqq \overline{\lim}_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{M_\nu - M_{\nu-1}}, \tag{7}$$

d. h. der untere und obere Limes von $\frac{a_\nu}{M_\nu}$ ist allemal eingeschlossen zwischen dem unteren und dem oberen Limes von $\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{M_\nu - M_{\nu-1}}$, falls diese letzteren endlich ausfallen.

II. Tritt an die Stelle der Ungleichung (5) die folgende:

$$\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{M_\nu - M_{\nu-1}} > A, \quad \text{bzw.} \quad \frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{M_\nu - M_{\nu-1}} < -A \quad \text{für } \nu > m, \tag{8}$$

in *dem* Sinne, daß zu *jedem* (noch so großen) $A > 0$ ein entsprechendes m von der fraglichen Beschaffenheit vorhanden ist, so ergibt sich, genau wie in voriger Nummer die Relation (6), zu *jedem* beliebig großen $A > 0$ und beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ die Existenz eines n von der Art, daß:

$$\frac{a_\nu}{M_\nu} > A - \varepsilon, \quad \text{bzw.} \quad \frac{a_\nu}{M_\nu} < -A + \varepsilon \quad \text{für } \nu > n. \tag{9}$$

Mit anderen Worten:[2])

Wachsen die M_ν mit ν monoton ins Unendliche, so hat man:

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu}{M_\nu} = +\infty \quad \textit{bzw.} \quad = -\infty, \tag{10}$$

wenn:

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{M_\nu - M_{\nu-1}} = +\infty \quad \textit{bzw.} \quad = -\infty.$$

---

1) Durch die analogen Schlüsse ergibt sich aus (6a):

Nehmen die m_ν monoton gegen Null ab und ist auch $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$, *so hat man:*

$$\underline{\lim}_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{m_\nu - m_{\nu-1}} \leq \underline{\lim}_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu}{m_\nu} \leq \overline{\lim}_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu}{m_\nu} \leq \overline{\lim}_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{m_\nu - m_{\nu-1}}. \tag{7a}$$

2) Analog findet man im Falle: $m_{\nu-1} > m_\nu > 0$, $\lim_{\nu\to\infty} m_\nu = \lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$, aus der Voraussetzung:

$$\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{m_\nu - m_{\nu-1}} > A \quad \text{bzw.} \quad < -A \quad \text{für jedes noch so große } A \text{ und } \nu > n, \tag{8a}$$

entsprechend der Relation (6a), die folgende:

Das gleiche gilt übrigens auch, wenn die M_ν *monoton abnehmen* und $\lim_{\nu\to\infty} M_\nu = -\infty$. Denn ist etwa $M_\nu = -M_\nu'$, wo $M_\nu' > M_{\nu-1}'$ und $\lim_{\nu\to\infty} M_\nu' = +\infty$, so wird:

$$(11)\quad \lim_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu}{M_\nu} = -\lim_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu'}{M_\nu'},\quad \lim_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{M_\nu - M_{\nu-1}} = -\lim_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{M_\nu' - M_{\nu-1}'},$$

sodaß:

$$(12)\quad \begin{cases} \text{aus:} & \lim_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu}{M_\nu'} = \lim_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{M_\nu' - M_{\nu-1}'} \\ \text{allemal folgt:} & \lim_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu}{M_\nu} = \lim_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{M_\nu - M_{\nu-1}}. \end{cases}$$

III. Fallen in (7) der *untere* und *obere Limes* von $\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{M_\nu - M_{\nu-1}}$ in eine bestimmte Zahl A zusammen, hat man also:

$$\overline{\underline{\lim_{\nu\to\infty}}}\,\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{M_\nu - M_{\nu-1}} = A,$$

so wird auch:

$$\overline{\underline{\lim_{\nu\to\infty}}}\,\frac{a_\nu}{M_\nu} = A.$$

Das gleiche gilt dann nach (11) und (12) im Falle: $M_{\nu-1} > M_\nu$, $\lim_{\nu\to\infty} M_\nu = -\infty$. Durch Zusammenfassung dieses Ergebnisses mit dem unter II ausgesprochenen gewinnt man also den folgenden *Hauptsatz*[1]):

Sind die M_ν monoton, $\lim_{\nu\to\infty} M_\nu = \pm\infty$, so hat man stets:

$$(9\text{a})\qquad \frac{a_\nu}{m_\nu} \geqq A \text{ bzw. } \leqq -A \text{ für } \nu \geqq n.$$

D. h.:

Nehmen die m_ν monoton gegen Null ab und ist auch $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$, *so hat man:*

$$(10\text{a})\qquad \lim_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu}{m_\nu} = \pm\infty, \quad \text{wenn: } \lim_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{m_\nu - m_{\nu-1}} = \pm\infty.$$

Das gleiche gilt auch, wenn die m_ν monoton gegen Null *zunehmen*, d. h. wenn $m_{\nu-1} < m_\nu < 0$, $\lim_{\nu\to\infty} m_\nu = 0$ (vgl. die Formeln (11) und (12) im Text).

1) Entsprechend folgt aus (7a), (10a):

Sind die m_ν monoton, $\lim_{\nu\to\infty} m_\nu = \lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$, *so hat man stets:*

$$(13\text{a})\qquad \lim_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu}{m_\nu} = \lim_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{m_\nu - m_{\nu-1}},$$

sobald der rechts stehende Grenzwert existiert.

(13) $$\lim_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu}{M_\nu}=\lim_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu-a_{\nu-1}}{M_\nu-M_{\nu-1}},$$

sobald der ***rechts*** *stehende Limes (im weiteren Sinne)* ***existiert.***

Nimmt man insbesondere $M_\nu=\nu$, so resultiert der *speziellere* (**Cauchysche**) *Grenzwertsatz:*

Es ist:

(14) $$\lim_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu}{\nu}=\lim_{\nu\to\infty}(a_\nu-a_{\nu-1}),$$

sobald der ***rechts*** *stehende Grenzwert* ***existiert.***

(**Beispiele:** Da $\lim_{\nu\to\infty}(\lg\nu-\lg(\nu-1))=\lim_{\nu\to\infty}\lg\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)=0$ (s. § 34, S. 206, Ungl. (3)), so folgt aus (14), daß auch:

(15) $$\lim_{\nu\to\infty}\frac{\lg\nu}{\nu}=0.\,^{1})$$

Dagegen hat man:

$$\lim_{\nu\to\infty}(e^\nu-e^{\nu-1})=\lim_{\nu\to\infty}e^{\nu-1}(e-1)=+\infty,$$

also nach (14) auch:

(16) $$\lim_{\nu\to\infty}\frac{e^\nu}{\nu}=+\infty.)$$

Übrigens sei ausdrücklich hervorgehoben, daß der Satz (13) bzw. (14) *keineswegs umkehrbar* ist, d. h. aus der *Existenz* des *linken* Grenzwertes folgt *keineswegs* diejenige des *rechts* stehenden.

(**Beispiel:** $a_\nu=\nu+(-1)^\nu$, $M_\nu=\nu$, also: $\lim_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu}{\nu}=1$. Dagegen:

$$a_\nu-a_{\nu-1}=\nu+(-1)^\nu-((\nu-1)+(-1)^{\nu-1})=1+2\cdot(-1)^\nu,$$

d. h.:

$$\underline{\lim}_{\nu\to\infty}(a_\nu-a_{\nu-1})=-1,\quad \overline{\lim}_{\nu\to\infty}(a_\nu-a_{\nu-1})=3.)$$

---

1) Wegen:

$$\sqrt[\nu]{\nu}=\nu^{\frac{1}{\nu}}=e^{\frac{1}{\nu}\lg\nu}$$

ergibt sich:

$$\lim_{\nu\to\infty}\sqrt[\nu]{\nu}=\lim_{\nu\to\infty}e^{\frac{1}{\nu}\lg\nu}$$

$$=e^{\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{\nu}\lg\nu}\qquad\text{(s. § 31, S. 191, Gl. (21)),}$$

also mit Benützung von Gl. (15):

$$\lim_{\nu\to\infty}\sqrt[\nu]{\nu}=1.$$

4. Der Satz III, Gl. (13), läßt für den Fall eines *endlichen*:

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{M_\nu - M_{\nu-1}}$$

eine Erweiterung zu, bei welcher die Voraussetzung, daß die M_ν *monoton* nach $\pm\infty$ divergieren, durch eine merklich *allgemeinere* ersetzt wird. Wir führen bei dieser Gelegenheit eine abgekürzte Schreibweise ein, von der wir späterhin noch vielfach Gebrauch machen werden. Wir bezeichnen nämlich eine Summe von der Form:

$$c_m + c_{m+1} + \cdots + c_n \quad (\text{wo } n > m)$$

durch das Symbol:

$$\sum_m^n {}^\nu c_\nu$$

(spr. Summe der c_ν nach ν von m bis n oder auch: für $\nu = m$ bis $\nu = n$).

Alsdann lautet die fragliche Verallgemeinerung des Satzes Gl. (13) folgendermaßen:

Ist:

$$(17) \quad \lim_{\nu \to \infty} |b_\nu| = +\infty \quad \textit{und für jedes } n\text{:} \quad \left|\frac{1}{b_n}\right| \sum_1^n {}^\nu |b_\nu - b_{\nu-1}| < B \text{ [1]},$$

so hat man:

$$(18) \quad \lim_{\nu \to \infty} \frac{a_\nu}{b_\nu} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{b_\nu - b_{\nu-1}},$$

falls der rechts stehende Limes endlich ausfällt.

---

1) Sind die b_ν *monoton*, etwa $b_\nu > 0$, $\lim\limits_{\nu \to \infty} b_\nu = +\infty$, so hat man:

$$\left|\frac{1}{b_n}\right| \sum_1^n {}^\nu |b_\nu - b_{\nu-1}| = \frac{1}{b_n} \sum_1^n {}^\nu (b_\nu - b_{\nu-1})$$
$$= \frac{b_n - b_0}{b_n}$$
$$< 1 \quad (\text{bzw. } = 1 \text{ für } n \to \infty).$$

Das gleiche gilt im Falle $b_\nu < 0$, $\lim\limits_{\nu \to \infty} b_\nu = -\infty$. Die bisher mit (M_ν) bezeichneten Zahlenfolgen genügen also den Bedingungen (17), sodaß der Hauptsatz III als spezieller Fall des vorliegenden erscheint, sobald der in Frage kommende Grenzwert *endlich* ausfällt. Dagegen erstreckt sich die Gültigkeit dieses allgemeineren Satzes *nicht* auf den Fall: $\lim\limits_{\nu \to \infty} \frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{b_\nu - b_{\nu-1}} = \pm\infty$.

Beweis. Ist etwa: $\lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{b_\nu - b_{\nu-1}} = A$, so läßt sich zu jedem $\varepsilon > 0$ ein m so fixieren, daß:

$$\left|\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{b_\nu - b_{\nu-1}} - A\right| = \left|\frac{a_\nu - a_{\nu-1} - A(b_\nu - b_{\nu-1})}{b_\nu - b_{\nu-1}}\right| < \varepsilon \quad \text{für } \nu > m,$$

also:

$$|a_\nu - a_{\nu-1} - A(b_\nu - b_{\nu-1})| < \varepsilon \cdot |b_\nu - b_{\nu-1}| \quad \text{für } \nu > m.$$

Setzt man der Reihe nach $\nu = m+1, m+2, \cdots, m+\varrho$, so folgt zunächst durch Addition der betreffenden Ungleichungen:

$$\sum_{m+1}^{m+\varrho}{}_\nu |(a_\nu - a_{\nu-1}) - A(b_\nu - b_{\nu-1})| < \varepsilon \cdot \sum_{m+1}^{m+\varrho}{}_\nu |b_\nu - b_{\nu-1}|.$$

Da aber:

$$\left|\sum_{m+1}^{m+\varrho}{}_\nu ((a_\nu - a_{\nu-1}) - A(b_\nu - b_{\nu-1}))\right| = |a_{m+\varrho} - a_m - A(b_{m+\varrho} - b_m)|$$
$$\leqq \sum_{m+1}^{m+\varrho}{}_\nu |(a_\nu - a_{\nu-1}) - A(b_\nu - b_{\nu-1})|,$$

so ergibt sich *a fortiori:*

$$|a_{m+\varrho} - a_m - A(b_{m+\varrho} - b_m)| < \varepsilon \cdot \sum_{m+1}^{m+\varrho}{}_\nu |b_\nu - b_{\nu-1}|;$$

und daher:

$$\left|\frac{a_{m+\varrho}}{b_{m+\varrho}} - A + \frac{Ab_m - a_m}{b_{m+\varrho}}\right| < \varepsilon \cdot \left|\frac{1}{b_{m+\varrho}}\right| \cdot \sum_{m+1}^{m+\varrho}{}_\nu |b_\nu - b_{\nu-1}|.$$
$$< \varepsilon \cdot B.$$

Schreibt man ν statt $m+\varrho$ und berücksichtigt, daß:

$$\left|\frac{a_\nu}{b_\nu} - A + \frac{Ab_m - a_m}{b_\nu}\right| \geqq \left|\frac{a_\nu}{b_\nu} - A\right| - \left|\frac{Ab_m - a_m}{b_\nu}\right|,$$

so findet man weiter:

$$\left|\frac{a_\nu}{b_\nu} - A\right| < \varepsilon \cdot B + \left|\frac{Ab_m - a_m}{b_\nu}\right| \quad \text{für: } \nu > m.$$

Wegen $\lim\limits_{\nu\to\infty}|b_\nu| = \infty$ läßt sich aber ein $n \geqq m$ so fixieren, daß: $\left|\frac{Ab_m - a_m}{b_\nu}\right| < \varepsilon$ für $\nu > n$, sodaß also:

$$\left|\frac{a_\nu}{b_\nu} - A\right| < \varepsilon \cdot (B+1) \quad \text{für: } \nu > n.$$

Da $G+1$ eine bestimmte positive Zahl vorstellt und $\varepsilon > 0$ beliebig klein gemacht werden kann, so erkennt man schließlich, daß:

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu}{b_\nu} = A, \quad \text{q. e. d.}$$

5. Zur Berechnung von Grenzwerten der Form:

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu}{b_\nu}, \quad \text{wo:} \quad \lim_{\nu\to\infty} a_\nu = \lim_{\nu\to\infty} b_\nu = \pm\infty \quad \text{bzw.} \quad = 0,$$

bedient man sich häufig mit Vorteil der folgenden, schon früher (§ 28, S. 171, 172, Formel (23)—(25)) erwähnten Schlußweise, welche jetzt etwas ausführlicher folgendermaßen dargestellt werden kann. Aus:

$$A_\nu < B_\nu < C_\nu \tag{19}$$

folgt nach § 36, Ungl. (16), (17), daß:

$$\underline{\lim}_{\nu\to\infty} A_\nu \leqq \underline{\lim}_{\nu\to\infty} B_\nu \leqq \overline{\lim}_{\nu\to\infty} B_\nu \leqq \overline{\lim}_{\nu\to\infty} C_\nu. \tag{20}$$

Ist nun:

$$\underline{\lim}_{\nu\to\infty} A_\nu = \overline{\lim}_{\nu\to\infty} C_\nu = A \quad \text{bzw.} \quad = \pm\infty, \tag{21a}$$

was in dem vorliegenden Falle schließlich nichts anderes bedeutet[1]), als:

$$\lim_{\nu\to\infty} A_\nu = \lim_{\nu\to\infty} C_\nu = A \quad \text{bzw.} \quad = \pm\infty, \tag{21b}$$

so ergibt sich, daß auch:

$$\underline{\lim}_{\nu\to\infty} B_\nu = \overline{\lim}_{\nu\to\infty} B_\nu = A \quad \text{bzw.} \quad = \pm\infty, \tag{22a}$$

d. h. in diesem Falle *existiert* $\lim\limits_{\nu\to\infty} B_\nu$ (zum mindesten *im weiteren Sinne*), und man hat:

$$\lim_{\nu\to\infty} B_\nu = A \quad \text{bzw.} \quad = \pm\infty. \tag{22b}$$

Beispiel I. Nach 34, S. 206, Ungl. (3) hat man:

$$\frac{\delta_\nu}{1+\delta_\nu} \leqq \lg(1+\delta_\nu) \leqq \delta_\nu \quad \text{für:} \quad \delta_\nu > -1, \tag{23}$$

wobei sich das Gleichheitszeichen ausschließlich auf den Fall $\delta_\nu = 0$ bezieht, also:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+\delta_\nu} < \dfrac{\lg(1+\delta_\nu)}{\delta_\nu} < 1, & \text{wenn:} \quad \delta_\nu > 0, \\ \dfrac{1}{1+\delta_\nu} > \dfrac{\lg(1+\delta_\nu)}{\delta_\nu} > 1, & \text{wenn:} \quad -1 < \delta_\nu < 0. \end{cases} \tag{24}$$

---

1) Wegen:

$$\underline{\lim}_{\nu\to\infty} A_\nu \leqq \overline{\lim}_{\nu\to\infty} A_\nu \leqq \overline{\lim}_{\nu\to\infty} C_\nu,$$

$$\underline{\lim}_{\nu\to\infty} A_\nu \leqq \underline{\lim}_{\nu\to\infty} C_\nu \leqq \overline{\lim}_{\nu\to\infty} C_\nu.$$

Ist nun $\delta_\nu \gtrless 0$, $\lim_{\nu\to\infty} \delta_\nu = 0$, also auch $\lim_{\nu\to\infty} \frac{\delta_\nu}{1+\delta_\nu} = 0$, so ergibt sich aus (23), daß zugleich auch $\lim_{\nu\to\infty} \lg(1+\delta_\nu) = 0$. Andererseits lehren aber die Ungleichungen (24), daß — wegen: $\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{1+\delta_\nu} = 1$ — auch:

(25) $$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\lg \overline{1+\delta_\nu}}{\delta_\nu} = 1 \quad \text{für: } \delta_\nu \gtrless 0, \ \lim_{\nu\to\infty} \delta_\nu = 0,$$

wofür man (vgl. § 33, S. 201, Gl. (17)) kürzer zu schreiben pflegt[1]):

(26) $$\lim_{\delta\to 0} \frac{\lg(1+\delta)}{\delta} = 1.$$

Zusatz. Schreibt man die letzte Gleichung folgendermaßen:

(27) $$\lim_{\delta\to 0} \lg(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} = 1,$$

und berücksichtigt, daß auch:

(28) $$\lg e = 1 \quad \text{und:} \quad e = \lim_{\delta\to 0} (1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} \quad (\S\,33, \text{Gl.}(17), \text{S.}201),$$

so läßt sich Gl. (27) durch die folgende ersetzen:

(29) $$\lim_{\delta\to 0} \lg(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} = \lg\left(\lim_{\delta\to 0}(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right).$$

Man hätte auch umgekehrt zunächst die Richtigkeit dieser letzten Gleichung beweisen und sodann mit Hilfe von (28) zu Gl. (26) gelangen können. Hierzu wäre nur erforderlich festzustellen, daß allgemein:

(30) $$\lim_{\nu\to\infty} \lg a_\nu = \lg(\lim_{\nu\to\infty} a_\nu),$$

vorausgesetzt, daß $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ eine bestimmte *positive* Zahl vorstellt.[2]) Man hat nun:

$$\begin{aligned} \lg a_\nu &= \lg\{a + (a_\nu - a)\} \\ &= \lg a\left(1 + \frac{a_\nu - a}{a}\right) \\ &= \lg a + \lg\left(1 + \frac{a_\nu - a}{a}\right). \end{aligned}$$

1) Die Bedeutung dieser Schreibweise ist also folgende: der fragliche Grenzwert kommt zustande, wenn man für δ sukzessive die als durchweg von Null verschieden anzunehmenden Glieder δ_ν einer im übrigen ganz beliebigen Folge mit dem Grenzwerte 0 einsetzt. Man bemerke, daß dabei die *Vorzeichen* der einzelnen δ_ν ganz willkürlich *wechseln* können.

2) Für den Fall: $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 1$ wurde dies bereits unmittelbar zuvor im Anschluß an Ungl. (24) bemerkt; für den Fall: $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = +\infty$ in § 34, S. 206, Gl. (4).

Da aber: $\lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu - a}{a} = 0$, also auch: $\lim\limits_{\nu\to\infty}\lg\left(1+\frac{a_\nu - a}{a}\right) = 0$, so ergibt sich in der Tat, in Übereinstimmung mit Gl. (30):

$$\lim_{\nu\to\infty}\lg a_\nu = \lg a.$$

Beispiel II. Nach § 33, S. 203, Ungl. (21) ist:

$$1+\delta_\nu < e^{\delta_\nu} < \frac{1}{1-\delta_\nu}, \quad \text{wenn: } |\delta_\nu| < 1,$$

also:

(31) $$\delta_\nu < e^{\delta_\nu} - 1 < \frac{\delta_\nu}{1-\delta_\nu}.$$

Hieraus folgt, daß:

(32) $$\begin{cases} 1 < \dfrac{e^{\delta_\nu}-1}{\delta_\nu} < \dfrac{1}{1-\delta_\nu}, & \text{wenn: } 0 < \delta_\nu < 1, \\ 1 > \dfrac{e^{\delta_\nu}-1}{\delta_\nu} > \dfrac{1}{1-\delta_\nu}, & \text{wenn: } 0 > \delta_\nu > -1. \end{cases}$$

Ist jetzt wiederum: $\lim\limits_{\nu\to\infty}\delta_\nu = 0$, also auch $\lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{\delta_\nu}{1-\delta_\nu} = 0$, so wird, wie Ungl. (31) lehrt, auch $\lim\limits_{\nu\to\infty}(e^{\delta_\nu}-1) = 0$. Alsdann ergibt sich aber aus (32), daß:

(33) $$\lim_{\nu\to\infty}\frac{e^{\delta_\nu}-1}{\delta_\nu} = 1, \quad \text{wenn: } \delta_\nu \gtrless 0, \ \lim_{\nu\to\infty}\delta_\nu = 0,$$

kürzer geschrieben:

(34) $$\lim_{\delta\to 0}\frac{e^{\delta}-1}{\delta} = 1.$$

Beispiel III. Setzt man in § 31, Ungl. (III), S. 192: $A = a_\nu$, $B = 1$, $C = \varrho$, so wird:

(35) $$\varrho\cdot(a_\nu - 1) \lesseqgtr a_\nu{}^\varrho - 1 \lesseqgtr \varrho\cdot a_\nu{}^{\varrho-1}\cdot(a_\nu - 1),$$

wobei das *obere* Zeichen gilt, falls $\varrho < 0$ oder $\varrho > 1$, das *untere*, falls $0 < \varrho < 1$. Dividiert man diese Ungleichung durch $(a_\nu - 1)$, so folgt:

(36) $$\begin{cases} \varrho \lesseqgtr \dfrac{a_\nu{}^\varrho - 1}{a_\nu - 1} \lesseqgtr \varrho\cdot a_\nu{}^{\varrho-1}, & \text{falls: } a_\nu - 1 > 0, \\ \varrho \gtreqless \dfrac{a_\nu{}^\varrho - 1}{a_\nu - 1} \gtreqless \varrho\cdot a_\nu{}^{\varrho-1}, & \text{falls: } a_\nu - 1 < 0. \end{cases}$$

Ist nun $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = 1$, so wird auch $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu{}^{\varrho-1} = (\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu)^{\varrho-1} = 1$, und somit:

(37) $$\lim_{\nu \to \infty} \frac{a_\nu^\varrho - 1}{a_\nu - 1} = \varrho, \quad \text{wenn: } a_\nu \gtrless 1, \ \lim_{\nu \to \infty} a_\nu = 1,$$

oder, kürzer geschrieben:

(38) $$\lim_{a \to 1} \frac{a^\varrho - 1}{a - 1} = \varrho$$

Setzt man $a = 1 \pm \delta$, wo also: $\delta \to 0$ für $a \to 1$, so nimmt Gl. (38) die folgende Form an:

(39) $$\lim_{\delta \to 0} \frac{(1+\delta)^\varrho - 1}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{1 - (1-\delta)^\varrho}{\delta} = \varrho.$$

Zusatz. Man hätte die Relation (38) bzw. (39) auch, ohne auf Ungl. (35) zu rekurrieren, mit Hilfe der beiden zuvor ausgeführten Grenzwertbestimmungen (26), (34) gewinnen können. Man hat nämlich identisch:

$$\frac{(1+\delta)^\varrho - 1}{\delta} = \varrho \cdot \frac{e^{\varrho \cdot \lg(1+\delta)} - 1}{\varrho \cdot \lg(1+\delta)} \cdot \frac{\lg(1+\delta)}{\delta},$$

$$= \varrho \cdot \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} \cdot \frac{\lg(1+\delta)}{\delta}, \text{ wenn gesetzt wird: } \alpha = \varrho \lg(1+\delta).$$

Da sodann $\alpha = \varrho \cdot \lg(1+\delta)$ für $\delta \to 0$ den Grenzwert $\varrho \cdot \lg 1$ d. h. 0 besitzt (s. Gl. (30)), so ergibt sich mit Benützung von (26) und (34):

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{(1+\delta)^\varrho - 1}{\delta} = \varrho \cdot \lim_{\alpha \to 0} \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} \cdot \lim_{\delta \to 0} \frac{\lg(1+\delta)}{\delta} = \varrho,$$

und, durch Substitution von $-\delta$ für δ, auch:

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1 - (1-\delta)^\varrho}{\delta} = \varrho.$$

6. Auf der Bestimmung von Grenzwerten der Form $\lim\limits_{\nu \to \infty} \frac{a_\nu}{b_\nu}$, wo $\lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu = \lim\limits_{\nu \to \infty} b_\nu = \pm \infty$ bzw. $\lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu = \lim\limits_{\nu \to \infty} b_\nu = 0$, beruht die Möglichkeit, das *Unendlichwerden* bzw. das *Nullwerden* von Zahlenfolgen in gewissen Fällen zu *vergleichen* und *„der Größe nach" zu ordnen*, was wiederum nichts anderes besagt, als: auf Grund jener Vergleichung eine bestimmte *Sukzession* festzusetzen.

Es genügt, sich hierbei auf *positive* Zahlenfolgen (a_ν), (b_ν) zu beschränken. Faßt man dann zunächst den Fall ins Auge, daß $\lim\limits_{\nu \to \infty} \frac{a_\nu}{b_\nu}$ (zum mindesten *im weiteren Sinne*) *existiert*, so muß allemal *eine* von den folgenden *drei* Möglichkeiten eintreten:

(40) $\lim\limits_{\nu \to \infty} \frac{a_\nu}{b_\nu} = 0$, (41) $\lim\limits_{\nu \to \infty} \frac{a_\nu}{b_\nu} = g > 0$, (42) $\lim\limits_{\nu \to \infty} \frac{a_\nu}{b_\nu} = +\infty$.

Da diese Gleichungen der Reihe nach aussagen, daß, für hinlänglich große ν, a_ν *sehr viel* (noch genauer gesagt: *beliebig vielmal*) *kleiner* ist als b_ν; oder *nahezu gleich* $g b_\nu$; oder endlich *sehr viel* (= *beliebig vielmal*) *größer* als b_ν: so wollen wir dieses Verhalten der a_ν, b_ν, gleichgültig wie im übrigen $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, a_\nu$, $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, b_\nu$ beschaffen sein mögen, durch die Ausdrücke kennzeichnen:

Im Falle (40) a_ν ist *infinitär kleiner* als b_ν, in Zeichen: (40a) $a_\nu \prec b_\nu$.

" " (41) a_ν ist *infinitär gleich* $c \cdot b_\nu$, " " (41a) $a_\nu \cong c b_\nu$.[1])

" " (42) a_ν ist *infinitär größer* als b_ν, " " (42a) $a_\nu \succ b_\nu$.

Wenn $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu}{b_\nu}$ *nicht* existiert (oder zum mindesten die Existenz *nicht feststeht*), so wollen wir noch den einen Fall hervorheben, daß $\frac{a_\nu}{b_\nu}$ schließlich *zwischen zwei endlichen positiven Zahlen* bleibt und daher

$$(43) \qquad c \leqq \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \frac{a_\nu}{b_\nu} \leqq C, \quad \text{wo: } 0 < c \leqq C < +\infty.$$

Alsdann soll gesagt werden:

a_ν ist *infinitär ähnlich* b_ν, in Zeichen: (43a) $a_\nu \sim b_\nu$.

Da hierbei die Möglichkeit $c = C$ nicht ausgeschlossen ist, so erscheint der Fall der *infinitären Gleichheit* von a_ν und $c b_\nu$ (Formel (41a)) als *spezieller* Fall der *infinitären Ähnlichkeit* (Formel (43a)).[2])

1) Auf Grund dieser Terminologie erscheinen die in § 25, Nr. 1 (S. 149) dem Individuum A zugeschriebenen Behauptungen als Ausdruck gewisser *infinitärer Gleichheiten*. Bezeichnet man etwa die Anzahl der in der Reihe $1, 2, \cdots, n$ enthaltenen *geraden* Zahlen mit g_n, so hat man, je nachdem n *gerade* oder *ungerade*, $g_n = \frac{n}{2}$ bzw. $g_n = \frac{n-1}{2}$ und daher für $n \to \infty$ in jedem Falle: $g_n \cong \frac{1}{2} n$. *In diesem Sinne*, d. h. bei dieser *besonderen* Art der gegenseitigen Zuordnung gibt es also *halb* so viele positive *gerade* Zahlen, wie *natürliche* Zahlen.

Bezeichnet man ferner die Anzahl der nicht-negativen, unterhalb 1 gelegenen *rationalen* Zahlen, deren Nenner die Zahl n nicht übersteigt, mit r_n, die Anzahl der im Intervall von 1 (inkl.) bis $k+1$ (exkl.) gelegenen, welche die gleiche Nennereigenschaft besitzen, mit $r_n^{(k)}$, so hat man offenbar für *jedes* n: $r_n^{(k)} = k \cdot r_n$ und daher schließlich auch: $r_n^{(k)} \cong k r_n$. *In diesem Sinne* gibt es also von 1 bis $k+1$ k-mal so viele *rationale* Zahlen, wie von 0 bis 1.

2) Will man auch für die noch übrig bleibenden Möglichkeiten, nämlich:

$$\text{(a)} \qquad \underline{\lim_{\nu\to\infty}} \frac{a_\nu}{b_\nu} = 0, \qquad \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \frac{a_\nu}{b_\nu} = c < \infty,$$

$$\text{(b)} \qquad \underline{\lim_{\nu\to\infty}} \frac{a_\nu}{b_\nu} = c > 0, \qquad \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \frac{a_\nu}{b_\nu} = \infty,$$

$$\text{(c)} \qquad \underline{\lim_{\nu\to\infty}} \frac{a_\nu}{b_\nu} = 0, \qquad \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \frac{a_\nu}{b_\nu} = \infty,$$

Ist jetzt insbesondere:

(44) $$\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = \lim_{\nu\to\infty} b_\nu = +\infty,$$

so sagt man auch, es werde:

a_ν von *niederer Ordnung unendlich,* als b_ν, wenn: $a_\nu \prec b_\nu$,
a_ν „ *gleicher* „ „ wie b_ν, „ $a_\nu \sim b_\nu$ bzw. $a_\nu \cong g b_\nu$,
a_ν „ *höherer* „ „ als b_ν, „ $a_\nu \succ b_\nu$,

oder auch: es *wachse* a_ν gleichzeitig mit ν *schwächer* (langsamer), *ebenso stark* (ebenso schnell), *stärker* (schneller) *ins Unendliche* als b_ν.[1])

Ist ferner:

(45) $$\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = \lim_{\nu\to\infty} b_\nu = 0,$$

so sagt man entsprechend (mit naturgemäß sich ergebender *Umkehrung* der Begriffe *„höher"* und *„niedriger"*), es werde:

a_ν von *höherer Ordnung Null* als b_ν, wenn: $a_\nu \prec b_\nu$,
a_ν „ *gleicher* „ „ wie b_ν, „ $a_\nu \sim b_\nu$ bzw. $a_\nu \cong g b_\nu$,
a_ν „ *niederer* „ „ als b_ν, „ $a_\nu \succ b_\nu$,

oder auch: es *konvergiere* mit unbegrenzt wachsendem ν *stärker* (schneller), *ebenso stark* (ebenso schnell), *schwächer* (langsamer) *gegen Null* als b_ν.[2])

---

sich einer analogen Schreibweise bedienen, so könnte man beziehungsweise setzen:

(a) $a_\nu \precsim b_\nu$, (b) $a_\nu \succsim b_\nu$, (c) $a_\nu \gtrless b_\nu$.

Wir werden jedoch diese Schreibweise *nicht* in dem obigen Sinne anwenden, vielmehr (analog, wie die entsprechenden Kombinationen der Zeichen $<$, $=$, $>$) nur in dem folgenden: In dem betreffenden Zusammenhange steht es frei, a_ν nach Belieben *infinitär kleiner* als b_ν **oder** *infinitär ähnlich* b_ν anzunehmen usf.

1) Beispiele:

$$\lg \nu \prec \nu \quad \text{(s. Gl. (15))},$$
$$\nu + \sqrt{\nu} \cong \nu,$$
$$e^\nu \succ \nu \quad \text{(s. Gl. (16))}.$$

2) Beispiele:

$$\left(\frac{1}{\nu}\right)^2 \prec \frac{1}{\nu},$$
$$\lg\left(1+\frac{1}{\nu}\right) \cong \frac{1}{\nu} \quad \text{(s. Gl. (25))},$$
$$\sqrt{\frac{1}{\nu}} \succ \frac{1}{\nu}.$$

§ 38. Vergleichung des Unendlichwerdens von ω_ν, e^{ω_ν}, $\lg \omega_\nu$ für $\omega_\nu \to \infty$. — Die iterierten Logarithmen. — Unendlichkeitsskalen.

1. Es sei (ω_ν) eine Folge beliebiger *positiver* Zahlen mit dem Grenzwerte $\lim\limits_{\nu\to\infty} \omega_\nu = +\infty$. Alsdann soll zunächst die Beziehung von e^{ω_ν} und ω_ν, oder gleich etwas allgemeiner von $(e^{\omega_\nu})^p$ und $\omega_\nu{}^q$ (wo p, q gleichfalls beliebige, aber feste positive Zahlen bedeuten) für unbegrenzt wachsende Werte von ν untersucht werden.[1])

Man hat *für jedes positive* α (s. § 33, Ungl. (19), S. 202):

$$e^\alpha > 1 + \alpha > \alpha,$$

und daher für $\alpha = \frac{p}{q+1} \cdot \omega_\nu$:

$$e^{\frac{p}{q+1}\cdot \omega_\nu} > \frac{p}{q+1} \cdot \omega_\nu .$$

Erhebt man beide Seiten dieser Ungleichung in die $(q+1)^{\text{te}}$ Potenz, so folgt:

$$e^{p\cdot\omega_\nu} > \left(\frac{p}{q+1}\right)^{q+1} \cdot \omega_\nu{}^{q+1}$$

und somit:

$$\frac{(e^{\omega_\nu})^p}{\omega_\nu{}^q} > \left(\frac{p}{q+1}\right)^{q+1} \cdot \omega_\nu .$$

Da der erste Faktor der rechten Seite eine bestimmte von Null verschiedene positive Zahl vorstellt (auch wenn man p beliebig klein, q beliebig groß fixiert), so folgt weiter:

(1) $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{(e^{\omega_\nu})^p}{\omega_\nu{}^q} = +\infty$ oder, anders geschrieben: $(e^{\omega_\nu})^p \succ \omega_\nu{}^q$,

in Worten:

> *Jede beliebig niedrige positive Potenz von e^{ω_ν} wird für $\lim \omega_\nu = +\infty$ von höherer Ordnung unendlich, als jede beliebig hohe positive Potenz von ω_ν.*

Für $p = q = 1$ hat man also speziell:

(1a) $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{e^{\omega_\nu}}{\omega_\nu} = +\infty$, also: $e^{\omega_\nu} \succ \omega_\nu$.

---

1) Der spezielle Fall: $\omega_\nu = \nu$ und $p = q = 1$ wurde bereits im vorigen Paragraphen, S. 230, Gl. (16) als Beispiel für den Cauchyschen Grenzwertsatz behandelt.

Setzt man in (1) $e^{\omega_\nu} = \omega_\nu'$, also $\omega_\nu = \lg \omega_\nu'$, so ergibt sich:

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{(\omega_\nu')^p}{(\lg \omega_\nu')^q} = +\infty$$

zunächst unter der Voraussetzung, daß:

$$\lim_{\nu\to\infty} \lg \omega_\nu' = +\infty.$$

Da aber $\lim\limits_{\nu\to\infty} \lg \omega_\nu'$ *positiv unendlich* wird, wenn $\lim\limits_{\nu\to\infty} \omega_\nu' = +\infty$ (s. § 34, S. 206, Gl. (4)), so folgt schließlich (indem man wieder ω_ν statt ω_ν' schreibt):

(2) $$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\omega_\nu^p}{(\lg \omega_\nu)^q} = +\infty, \quad \text{also:} \quad \omega_\nu^p \succ (\lg \omega_\nu)^q,$$

sofern nur ω_ν der Bedingung genügt: $\lim\limits_{\nu\to\infty} \omega_\nu = +\infty$, also:

Jede beliebig niedrige positive Potenz von ω_ν wird für $\lim \omega_\nu = +\infty$ von höherer Ordnung unendlich, als jede beliebig hohe positive Potenz von $\lg \omega_\nu$.

Ordnet man dem Unendlichwerden oder, wie wir kürzer sagen wollen, dem „*Unendlich*" von ω_ν die „Ordnungszahl" 1, demjenigen von ω_ν^q (wo $q > 0$) die Ordnungszahl q zu, so kann man sagen, es werde $\lim\limits_{\nu\to\infty} e^{\omega_\nu}$ für $\lim\limits_{\nu\to\infty} \omega_\nu = +\infty$ *unendlich groß von einer Ordnung, die jede noch so große positive Zahl q übersteigt*, oder kürzer: es werde $\lim\limits_{\nu\to\infty} e^{\omega_\nu}$ *unendlich groß von unendlich hoher Ordnung.*

Dagegen wird $\lim\limits_{\nu\to\infty} \lg \omega_\nu$ und sogar $\lim\limits_{\nu\to\infty} (\lg \omega_\nu)^q$ (für jeden beliebig großen *positiven* Exponenten q) *unendlich groß von einer Ordnung, die niedriger ist, als jede noch so kleine positive Zahl p*, oder anders ausgesprochen, es wachsen $\lg \omega_\nu$, $(\lg \omega_\nu)^q$ mit ω_ν *langsamer* ins Unendliche, als *jede noch so niedrige* Potenz von ω_ν, also gewissermaßen *unendlich viel langsamer*, als ω_ν selbst.

2. Man kann nun aber leicht Zahlenfolgen konstruieren, die wiederum mit ω_ν noch „*unendlich viel langsamer*" ins Unendliche wachsen, als $\lg \omega_\nu$. Bildet man nämlich von $\lg \omega_\nu$ wiederum den natürlichen Logarithmus wobei wir zur Abkürzung:

(3) $$\lg (\lg \omega_\nu) = \lg \lg \omega_\nu = \lg_2 \omega_\nu$$

schreiben wollen, so wird offenbar mit ω_ν auch $\lg_2 \omega_\nu$ über alle Grenzen wachsen.

Setzt man jetzt in (2) $\lg \omega_\nu$ an Stelle von ω_ν, also $\lg_2 \omega_\nu$ an Stelle von $\lg \omega_\nu$, so folgt zunächst:

$$(4) \qquad \lim_{\nu \to \infty} \frac{(\lg \omega_\nu)^p}{(\lg_2 \omega_\nu)^q} = +\infty, \quad \text{oder:} \quad (\lg \omega_\nu)^p \succ (\lg_2 \omega_\nu)^q.$$

Man könnte nun in dieser Relation ω_ν wieder durch $\lg \omega_\nu$ ersetzen, sodaß im Nenner der Ausdruck:

$$\lg_2 (\lg \omega_\nu) = \lg_3 \omega_\nu$$

erscheinen würde. Fährt man in dieser Weise fort und bezeichnet allgemein mit $\lg_k \omega_\nu$ den *k-fach iterierten Logarithmus* von ω_ν, d. h. diejenige Zahl, die aus ω_ν hervorgeht, wenn man die Operation des Logarithmierens k-mal anwendet (wobei man nur von vornherein für ω_ν eine positive Zahl von hinlänglicher Größe anzunehmen hat, derart, daß $\lg \omega_\nu$, $\lg_2 \omega_\nu, \cdots$, $\lg_k \omega_\nu$ sämtlich *positiv* ausfallen), so ergibt sich allgemein:

$$(5) \qquad \lim_{\nu \to \infty} \frac{(\lg_{k-1} \omega_\nu)^p}{(\lg_k \omega_\nu)^q} = +\infty, \quad \text{oder:} \quad (\lg_{k-1} \omega_\nu)^p \succ (\lg_k \omega_\nu)^q.$$

Denn angenommen, diese Relation sei für irgendein bestimmtes k erwiesen — wie es tatsächlich nach Gl. (4) für $k = 2$ der Fall ist (da ja: $\lg \omega_\nu = \lg_1 \omega_\nu$) — so folgt, wenn man ω_ν durch $\lg \omega_\nu$ ersetzt (was wiederum ohne weiteres gestattet ist, da ja ω_ν keiner anderen Beschränkung unterliegt, als mit ν *positiv* über alle Grenzen zu wachsen, und diese Eigenschaft alsdann auch $\lg \omega_\nu$ zukommt):

$$(6) \qquad \lim_{\nu \to \infty} \frac{(\lg_k \omega_\nu)^p}{(\lg_{k+1} \omega_\nu)^q} = +\infty, \quad \text{oder:} \quad (\lg_k \omega_\nu)^p \succ (\lg_{k+1} \omega_\nu)^q$$

(da ja: $\lg_{k-1} (\lg \omega_\nu) = \lg_k \omega_\nu$, $\lg_k (\lg \omega_\nu) = \lg_{k+1} \omega_\nu$), womit die Allgemeingültigkeit der Beziehung (5) für $k = 2, 3, 4, \cdots\cdots$ erwiesen ist.

Bezeichnet also (ω_ν) eine Folge positiver Zahlen mit dem Grenzwerte ∞, so kann man eine *unbegrenzt fortsetzbare Skala* von Zahlenfolgen, nämlich:

$$(7) \qquad (\omega_\nu), (\lg_1 \omega_\nu), (\lg_2 \omega_\nu), \cdots, (\lg_k \omega_\nu), \cdots\cdots$$

von der Beschaffenheit herstellen, daß die Glieder jeder einzelnen Folge *unendlich viel langsamer*[1]) ins Unendliche wachsen, als diejenigen der unmittelbar vorangehenden (und somit *jeder* vorangehenden).

---

1) D. h. (s. Nr. 1 am Schlusse): Bedeuten (ω_ν'), (ω_ν'') irgendzwei konsekutive Folgen jener Skala, so hat man nicht nur:

$$\omega_\nu' \prec \omega_\nu'',$$

sondern sogar:

Analog würden — auf Grund der Relation (1) — die Zahlenfolgen:

(8) $$(\omega_\nu),\ (e^{\omega_\nu}),\ \left(e^{e^{\omega_\nu}}\right),\ \left(e^{e^{e^{\omega_\nu}}}\right),\ \ldots\ldots$$

eine *unbegrenzt fortsetzbare Skala* von sukzessive *unendlich viel schneller* ins Unendliche wachsenden Folgen liefern.

3. Es lassen sich aber auch Zahlenfolgen (ω_ν') herstellen, welche nicht nur *unendlich viel langsamer* bzw. *schneller* ins Unendliche wachsen, als *irgendeine bestimmte* Folge der Skala (7) bzw. (8) *von beliebig hoher* Rangordnung, sondern *unendlich viel langsamer* bzw. *schneller* als *jede* Folge (7) bzw. (8). Wir wollen dies hier an einer Skala von der Form (8) zeigen; auf den Fall einer Skala von der Form (7) werden wir später noch zurückkommen.[1])

Wir nehmen der Einfachheit halber $\omega_\nu = \nu$ und führen die folgenden Bezeichnungen ein[2]):

(9) $$\nu = e_\nu^{(0)},\quad e^\nu = e^{e_\nu^{(0)}} = e_\nu^{(1)},\quad e^{e^\nu} = e^{e_\nu^{(1)}} = e_\nu^{(2)},$$
$$e^{e^{e^\nu}} = e^{e_\nu^{(2)}} = e_\nu^{(3)},\ \cdots,\ e^{e_\nu^{(k-1)}} = e_\nu^{(k)},\ \ldots\ldots,$$

sodaß also die Skala (8) die Form annimmt:

$$(e_\nu^{(0)}),\ (e_\nu^{(1)}),\ (e_\nu^{(2)}),\ \cdots,\ (e_\nu^{(k)}),\ \ldots\ldots.$$

Dabei ist dann:

(10) $$e_\nu^{(0)} \prec e_\nu^{(1)} \prec e_\nu^{(2)} \prec \cdots \prec e_\nu^{(k)} \prec \cdots\cdots$$

(und sogar für jedes noch so große $r > 0$: $(e_\nu^{(k-1)})^r \prec e_\nu^{(k)}$).

Setzt man jetzt:

(11) $$E_\nu = e_\nu^{(\nu)} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots),\ ^{3})$$

$$\omega_\nu'^{\,q} \prec \omega_\nu''^{\,p},$$

auch wenn man $q > 0$ *noch so groß*, $p > 0$ *noch so klein* fixiert hat. Hierzu genügt es übrigens, wenn nur für jedes *beliebig groß* fixierte $r > 0$:

$$\omega_\nu'^{\,r} \prec \omega_\nu''.$$

Denn man braucht nur $r = \frac{q}{p}$ zu setzen, um von dieser letzteren Beziehung zu der vorhergehenden zu gelangen.

1) S. § 52, Nr. 5.

2) Hierzu sei ausdrücklich bemerkt, daß man unter a^{b^c} stets $a^{(b^c)}$, *nicht* $(a^b)^c$ zu verstehen hat. (Vgl. hierzu S. 79.)

3) Die Anfangsglieder der Zahlenfolge (E_ν) lauten also:

$$e_0^{(0)},\ e_1^{(1)},\ e_2^{(2)},\ e_3^{(3)}\ \text{usf.},$$

d. h. ausgeschrieben:

$$0,\ e^1,\ e^{e^2},\ e^{e^{e^3}}\ \text{usf.}$$

so läßt sich zeigen, daß:

(12) $$E_\nu \succ e_\nu^{(k)} \quad \text{und sogar:} \quad \succ (e_\nu^{(k)})^r,$$

wie groß auch k und r angenommen werden mögen.

Da für $\nu \geqq 0$:

$$e^\nu \geqq 1 + \nu > \nu \quad (\text{§ 33, S. 202, Ungl. (19)}),$$

so hat man für $\nu = 0, 1, 2, \cdots$:

(13) $$e_\nu^{(0)} < e_\nu^{(1)}, \quad e_\nu^{(1)} < e_\nu^{(2)}, \quad \cdots, \quad e_\nu^{(k)} < e_\nu^{(k+1)}, \quad \cdots\cdots.$$

Andererseits hat man — wegen $\nu < \nu + 1$:

(14) $$e_\nu^{(0)} < e_{\nu+1}^{(0)}, \quad e_\nu^{(1)} < e_{\nu+1}^{(1)}, \quad \cdots, \quad e_\nu^{(k)} < e_{\nu+1}^{(k)}, \quad \cdots\cdots$$

und daher durch gleichzeitige Anwendung von (13) und (14) *a fortiori*:

(15) $$e_\nu^{(k)} < e_{\nu+1}^{(k+1)}, \quad \text{also speziell:} \quad e_\nu^{(\nu)} < e_{\nu+1}^{(\nu+1)}.$$

Daraus geht zunächst hervor, daß die Folge $(E_\nu) \equiv (e_\nu^{(\nu)})$, geradeso wie die einzelnen Folgen $(e_\nu^{(k)})$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$, eine *monoton zunehmende* ist.

Wird jetzt k *beliebig groß* fixiert, so hat man nach (10):

(16) $$e_\nu^{(k+1)} \succ e_\nu^{(k)} \quad \text{und sogar:} \succ (e_\nu^{(k)})^r \text{ bei beliebig großem } r.$$

Nun ist aber nach (13):

(17) $$e_{k+2}^{(k+2)} > e_{k+2}^{(k+1)}, \quad e_{k+3}^{(k+3)} > e_{k+3}^{(k+1)}, \quad \cdots, \quad e_{k+\lambda}^{(k+\lambda)} > e_{k+\lambda}^{(k+1)}, \quad \cdots,$$

d. h. man hat:

(18) $$E_\nu > e_\nu^{(k+1)} \quad \text{für:} \quad \nu \geqq k + 2$$

und daher, in Rücksicht auf (16), *a fortiori*:

$$E_\nu \succ \left(e_\nu^{(k)}\right)^r,$$

womit die ausgesprochene Behauptung (12) bewiesen ist.

4. Im Anschlusse an die Skala (7) stellen wir noch die folgenden, für die Lehre von der Konvergenz unendlicher Reihen wichtigen Betrachtungen an. Wir setzen:

(19) $$L_k(\omega_\nu) = \omega_\nu \cdot \lg_1 \omega_\nu \cdot \lg_2 \omega_\nu \cdots \lg_k \omega_\nu \quad (k = 1, 2, 3, \cdots),$$

oder auch, indem wir der Gleichförmigkeit halber noch die Bezeichnung einführen:

$$\lg_0 \omega_\nu = \omega_\nu,$$

(19a) $$L_k(\omega_\nu) = \lg_0 \omega_\nu \cdot \lg_1 \omega_\nu \cdot \lg_2 \omega_\nu \cdots \lg_k \omega_\nu \quad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

Man hat also speziell:

(19b) $L_0(\omega_\nu) = \omega_\nu,\ L_1(\omega_\nu) = \omega_\nu \cdot \lg \omega_\nu,\ L_2(\omega_\nu) = \omega_\nu \cdot \lg \omega_\nu \cdot \lg_2 \omega_\nu, \cdots$

und allgemein:

(20) $L_{k+1}(\omega_\nu) = L_k(\omega_\nu) \cdot \lg_{k+1} \omega_\nu,$ also: $L_k(\omega_\nu) \prec L_{k+1}(\omega_\nu)$.

Es wächst hiernach $L_k(\omega_\nu)$ mit ω_ν *um so schneller* ins Unendliche, je *größer* k ist; andererseits aber, *wie groß* auch k angenommen werden mag, immerhin *unendlich viel langsamer* als $\omega_\nu^{1+\varrho}$ für jedes *noch so klein* fixierte $\varrho > 0$. Denn man hat mit Benützung der Beziehungen (5) und (2):

(21) $L_k(\omega_\nu) \prec \omega_\nu \cdot (\lg \omega_\nu)^k,$ also *a fortiori*: $\prec \omega_\nu^{1+\varrho}$ (für $\varrho > 0$).

Wir definieren ferner:

(22) $$L_k^{(\varrho)}(\omega_\nu) = L_k(\omega_\nu) \cdot (\lg_k \omega_\nu)^\varrho$$
$$= \lg_0 \omega_\nu \cdot \lg_1 \omega_\nu \cdots \lg_{k-1} \omega_\nu \cdot (\lg_k \omega_\nu)^{1+\varrho},$$ [1]

also speziell:

(22a) $$L_0^{(\varrho)}(\omega_\nu) = \omega_\nu^{1+\varrho}, \quad L_1^{(\varrho)}(\omega_\nu) = \omega_\nu (\lg \omega_\nu)^{1+\varrho},$$
$$L_2^{(\varrho)}(\omega_\nu) = \omega_\nu \cdot \lg \omega_\nu \cdot (\lg_2 \omega_\nu)^{1+\varrho}, \ \cdots.$$

Ist dann $\varrho > 0$, so findet man offenbar:

(23) $$L_k^{(\varrho)}(\omega_\nu) \succ L_{k+1}^{(\varrho)}(\omega_\nu),$$

da: $$\frac{L_k^{(\varrho)}(\omega_\nu)}{L_{k+1}^{(\varrho)}(\omega_\nu)} = \frac{(\lg_k \omega_\nu)^\varrho}{(\lg_{k+1} \omega_\nu)^{1+\varrho}} \quad \text{und:} \quad \lim_{\nu \to \infty} \frac{(\lg_k \omega_\nu)^\varrho}{(\lg_{k+1} \omega_\nu)^{1+\varrho}} = \infty.$$

Zugleich hat man, wie *groß* auch k und wie *klein* die *positive* Zahl ϱ angenommen werden mag, nicht nur:

(24) $$L_k^{(\varrho)}(\omega_\nu) \succ L_k(\omega_\nu) \quad \left(\text{wegen: } \frac{L_k^{(\varrho)}(\omega_\nu)}{L_k(\omega_\nu)} = (\lg_k \omega_\nu)^\varrho\right),$$

sondern auch, *für jedes noch so große* λ:

(25) $$L_k^{(\varrho)}(\omega_\nu) \succ L_{k+\lambda}(\omega_\nu),$$

da:

(25a) $$\frac{L_k^{(\varrho)}(\omega_\nu)}{L_{k+\lambda}(\omega_\nu)} = \frac{(\lg_k \omega_\nu)^\varrho}{\lg_{k+1} \omega_\nu \cdots \lg_{k+\lambda} \omega_\nu}$$

und: $$(\lg_k \omega_\nu)^\varrho \succ (\lg_{k+1} \omega_\nu)^\lambda \succ \lg_{k+1} \omega_\nu \cdots \lg_{k+\lambda} \omega_\nu.$$

---

1) Es ist also:
$$L_k^{(0)}(\omega_\nu) = L_k(\omega_\nu).$$

Die im vorstehenden erhaltenen Ergebnisse lassen sich folgendermaßen zusammenfassen.

Ist $\lim\limits_{\nu \to \infty} \omega_\nu = +\infty$ und $\varrho > 0$ (im übrigen beliebig klein), so hat man:

$$\text{(I)} \quad \omega_\nu \prec \omega_\nu \cdot \lg_1 \omega_\nu \prec \omega_\nu \cdot \lg_1 \omega_\nu \cdot \lg_2 \omega_\nu \prec \cdots$$
$$\cdots \prec \omega_\nu \cdot \lg_1 \omega_\nu \cdots \lg_{k-1} \omega_\nu \cdot \lg_k \omega_\nu \prec \cdots\cdots,$$
$$\text{(II)} \quad \omega_\nu^{1+\varrho} \succ \omega_\nu \cdot (\lg_1 \omega_\nu)^{1+\varrho} \succ \omega_\nu \cdot \lg_1 \omega_\nu \cdot (\lg_2 \omega_\nu)^{1+\varrho} \succ \cdots$$
$$\cdots \succ \omega_\nu \cdot \lg_1 \lg \omega_\nu \cdots \lg_{k-1} \omega_\nu \cdot (\lg_k \omega_\nu)^{1+\varrho} \succ \cdots\cdots.$$

Die Glieder der Skala (I) wachsen also mit ν um so *schneller*, die Glieder der Skala (II) um so *langsamer* ins Unendliche, je *größer* k angenommen wird. Der Faktor, um den sich ein Glied der Skale (II) von dem *entsprechenden*, d. h. zu dem nämlichen k gehörigen Gliede der Skala (I) unterscheidet, fällt um so kleiner aus, je *größer* k ist. Dabei ist aber ein beliebiges Glied der Skala (II) nicht nur *infinitär größer*, als das *entsprechende*, sondern auch als *jedes beliebige*, insbesondere jedes *beliebig viel später* auftretende Glied der Skala (I).

5. Wir knüpfen hieran noch einige für die Reihenlehre bemerkenswerte Relationen, denen $\lg_k \omega_\nu$, $L_k(\omega_\nu)$ genügen, falls man die ω_ν noch der Beschränkung unterwirft, mit ν *monoton* zuzunehmen.

Es bedeute also (M_ν) eine *positive*, *monoton zunehmende* Folge mit dem Grenzwerte $+\infty$. Da alsdann für jedes ν: $\frac{M_\nu}{M_{\nu-1}} > 1$, so hat man nach § 34, Ungl. (2) (S. 206):

$$\text{(26)} \qquad \lg M_\nu - \lg M_{\nu-1} = \lg \frac{M_\nu}{M_{\nu-1}} \begin{cases} < \dfrac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_{\nu-1}}, \\[2ex] > \dfrac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_\nu}. \end{cases}$$

Da ferner mit M_ν auch $\lg M_\nu$ *monoton* ins Unendliche wächst (s. § 32, Ungl. (16), (17), S. 197), so ist die Folge $(\lg M_\nu)$ von demselben Charakter, wie die Folge (M_ν). Man darf also in (26) M_ν auch durch $\lg M_\nu$ ersetzen (wobei nur M_ν bzw. ν von vornherein so groß zu wählen ist, daß $\lg M_{\nu-1} > 0$) und findet somit:

$$\text{(27)} \qquad \lg_2 M_\nu - \lg_2 M_{\nu-1} \begin{cases} < \dfrac{\lg M_\nu - \lg M_{\nu-1}}{\lg M_{\nu-1}} < \dfrac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_{\nu-1} \lg M_{\nu-1}}, \\[2ex] > \dfrac{\lg M_\nu - \lg M_{\nu-1}}{\lg M_\nu} > \dfrac{M_\nu - M_{\nu-1}}{M_\nu \lg M_\nu}. \end{cases}$$

Hiernach ist zu vermuten, daß allgemein:

$$(28)\qquad \lg_k M_\nu - \lg_k M_{\nu-1} \begin{cases} < \dfrac{M_\nu - M_{\nu-1}}{L_{k-1}(M_{\nu-1})}, \\ > \dfrac{M_\nu - M_{\nu-1}}{L_{k-1}(M_\nu)}. \end{cases}$$

Angenommen, diese Relation, deren Richtigkeit für $k=1$ und $k=2$ tatsächlich erwiesen ist (da ja: $M_\nu = L_0(M_\nu)$, $M_\nu \cdot \lg M_\nu = L_1(M_\nu)$), gelte *für irgendeinen bestimmten Wert* k; alsdann ergibt sich durch Substitution von $\lg M_\nu$ an Stelle von M_ν zunächst:

$$\lg_{k+1} M_\nu - \lg_{k+1} M_{\nu-1} \begin{cases} < \dfrac{\lg M_\nu - \lg M_{\nu-1}}{\lg_1 M_{\nu-1} \cdot \lg_2 M_{\nu-1} \cdots \lg_k M_{\nu-1}}, \\ > \dfrac{\lg M_\nu - \lg M_{\nu-1}}{\lg_1 M_\nu \cdot \lg_2 M_\nu \cdots \lg_k M_\nu}, \end{cases}$$

also mit Berücksichtigung von Ungl. (26):

$$(28\text{a})\qquad \lg_{k+1} M_\nu - \lg_{k+1} M_{\nu-1} \begin{cases} < \dfrac{M_\nu - M_{\nu-1}}{L_k(M_{\nu-1})}, \\ > \dfrac{M_\nu - M_{\nu-1}}{L_k(M_\nu)}, \end{cases}$$

womit die Allgemeingültigkeit der Formel (28) für $k = 1, 2, 3, \cdots$ bewiesen ist.

Genügt jetzt M_ν noch der weiteren Bedingung:

$$(29)\qquad M_\nu \sim M_{\nu-1},$$

d. h. besitzt der Quotient $\dfrac{M_\nu}{M_{\nu-1}}$ einen endlichen, von Null verschiedenen *oberen* und *unteren Limes* — etwa A und a (wobei auch $A = a$ sein kann), so kann man setzen:

$$a - \varepsilon < \frac{M_\nu}{M_{\nu-1}} < A + \varepsilon \quad \text{für: } \nu \geqq n,$$

also:

$$\lg M_{\nu-1} + \lg(a-\varepsilon) < \lg M_\nu < \lg M_{\nu-1} + \lg(A+\varepsilon)$$

$$1 + \frac{\lg(a-\varepsilon)}{\lg M_{\nu-1}} < \frac{\lg M_\nu}{\lg M_{\nu-1}} < 1 + \frac{\lg(A+\varepsilon)}{\lg M_{\nu-1}}$$

und daher schließlich, wegen $\lim\limits_{\nu\to\infty} \lg M_{\nu-1} = +\infty$:

$$(30)\qquad \lim_{\nu\to\infty} \frac{\lg M_\nu}{\lg M_{\nu-1}} = 1 \quad \text{d. h.} \quad \lg M_\nu \cong \lg M_{\nu-1},$$

woraus dann nach derselben Schlußweise allgemein folgt:

$$(31) \qquad \lg_k M_\nu \cong \lg_k M_{\nu-1} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots).$$

In diesem Falle liefern die Ungleichungen (28) offenbar die folgenden infinitären Beziehungen:

$$(32) \quad \lg_k M_\nu - \lg_k M_{\nu-1} \sim \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{L_{k-1}(M_{\nu-1})} \sim \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{L_{k-1}(M_\nu)} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots).$$

Und ist geradezu:

$$(33) \qquad M_\nu \cong M_{\nu-1},$$

also um so mehr auch:

$$L_{k-1}(M_\nu) \cong L_{k-1}(M_{\nu-1}),$$

so erhält man:

$$(34) \quad \lg_k M_\nu - \lg_k M_{\nu-1} \cong \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{L_{k-1}(M_{\nu-1})} \cong \frac{M_\nu - M_{\nu-1}}{L_{k-1}(M_\nu)} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots).$$

Setzt man speziell $M_\nu = \nu + 1$, so hat man $\nu \cong \nu + 1$ und daher:

$$(35) \qquad \lg_k(\nu + 1) - \lg_k(\nu) \cong \frac{1}{L_{k-1}(\nu)} \cong \frac{1}{L_{k-1}(\nu + 1)},$$

oder, anders geschrieben:

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{(a)} & \lim\limits_{\nu \to \infty} L_k(\nu) \left\{ \dfrac{\lg_k(\nu + 1)}{\lg_k(\nu)} - 1 \right\} = 1, \\[2ex] \text{(b)} & \lim\limits_{\nu \to \infty} L_k(\nu + 1) \left\{ 1 - \dfrac{\lg_k(\nu)}{\lg_k(\nu + 1)} \right\} = 1. \end{array} \right.$$

Kapitel VI.

Zweifach unendliche Zahlenfolgen (Doppelfolgen).

§ 39. Umformung einfach unendlicher Zahlenfolgen in mehrfach unendliche und umgekehrt.

1. Zerlegt man eine unbegrenzte Zahlenfolge (a_λ) in *zwei* solche, die mit $(a_\mu^{(0)})$ und (a_μ') bezeichnet werden mögen, die letztgenannte wieder in *zwei* unbegrenzte Zahlenfolgen: $(a_\mu^{(1)})$ und (a_μ''), und denkt sich dieses Verfahren unbegrenzt fortgesetzt (was offenbar *möglich* ist, da ja *jede* unbegrenzte Zahlenfolge immer wieder in *zwei* solche zerlegt werden kann), so erhält man an Stelle der *einen* Zahlenfolge:

$$(1) \qquad a_0\, a_1\, a_2 \cdots a_\lambda \cdots\cdots$$

eine *unbegrenzte Reihe* von Zahlenfolgen:

$$(2)\quad \begin{cases} a_0^{(0)}\; a_1^{(0)}\; a_2^{(0)} \dots a_\mu^{(0)} \dots\dots \\ a_0^{(1)}\; a_1^{(1)}\; a_2^{(1)} \dots a_\mu^{(1)} \dots\dots \\ a_0^{(2)}\; a_1^{(2)}\; a_2^{(2)} \dots a_\mu^{(2)} \dots\dots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_0^{(\nu)}\; a_1^{(\nu)}\; a_2^{(\nu)} \dots a_\mu^{(\nu)} \dots\dots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

welche als eine *Umformung* oder *Umordnung* der ursprünglichen Zahlenfolge in *dem* Sinne angesehen werden kann, daß *jedem* Gliede a_λ der Folge (1) ein ihm *gleiches* $a_\mu^{(\nu)}$ des Schemas (2) entspricht und *umgekehrt*. Dieses gegenseitige Entsprechen läßt sich in der Weise charakterisieren, daß dem *einfachen Index*, also *der Zahl* λ umkehrbar eindeutig ein *Doppelindex*, also ein bestimmtes *Zahlenpaar* (μ, ν) zugeordnet ist, und auf Grund dieser Zuordnung erscheint dann das $(\lambda + 1)^{\text{te}}$ Glied der Folge (1) innerhalb des Schemas (2) als dasjenige Glied, welches der $(\mu + 1)^{\text{ten}}$ *Kolonne* und der $(\nu + 1)^{\text{ten}}$ *Zeile* angehört.[1])

Wir bezeichnen eine solche *unbegrenzte Reihe von Zahlenfolgen* nach Art des Schemas (2), mit anderen Worten eine *Zahlenfolge*, bei welcher an Stelle jedes einzelnen *Gliedes* einer Folge der bisher betrachteten Art wieder eine *Zahlenfolge* erscheint[2]), als *zweifach unendliche Zahlenfolge* oder kürzer als *Doppelfolge* und dem gegenüber die bisher betrachteten Zahlenfolgen nach Bedarf als *einfach unendliche* oder kürzer als *einfache*.

Als Beispiel für die Umformung einer einfachen Zahlenfolge (a_λ) in eine Doppelfolge diene folgendes. Nach § 15, Nr. 1 (S. 92) läßt sich

---

1) Statt $a_\mu^{(\nu)}$ schreibt man häufig auch $a_{\mu,\nu}$ oder, wo kein Mißverständnis möglich, auch $a_{\mu\nu}$ (ohne Komma; das Komma ist jedoch unentbehrlich, sobald an die Stelle der einfachen Indizes μ und ν solche von zusammengesetzter Form treten, z. B. $a_{p\mu+\varrho,\, q\nu+\sigma}$). Die Schreibweise mit den *neben*einander gestellten Indizes erweist sich übrigens als die ausschließlich brauchbare, sobald es sich um Zahlenfolgen handelt, die *mehr* als *zwei*fach unendlich sind (s. Nr. 3 dieses Paragraphen). Für *zwei*fach unendliche Zahlenfolgen besitzt jedoch die im Text gewählte Schreibweise den Vorzug, weniger platzraubend und merklich übersichtlicher zu sein (man vergleiche das oben gegebene Beispiel

$$a_{p\mu+\varrho,\, q\nu+\sigma} \quad\text{mit}\quad a_{p\mu+\varrho}^{(q\nu+\sigma)}).$$

2) Solche Zahlenfolgen sind uns genau genommen auch schon früher begegnet. Man braucht sich nur klar zu machen, daß bei einer Zahlenfolge mit *irrationalen* Gliedern (s. § 26—28) jedes Glied in Wahrheit nur das Zeichen für eine Zahlenfolge ist.

jeder Index λ stets und zwar nur auf eine einzige Weise in die Form setzen:

(3) $$\lambda = c_0 + c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 2^2 + \cdots + c_{m_\lambda} \cdot 2^{m_\lambda} \quad (\lambda = 0, 1, 2, \cdots),$$

wo $c_0, c_1, \cdots, c_{m_\lambda - 1}$ entweder 0 oder 1 sind, dagegen (sc. für $\lambda \geqq 1$) $c_{m_\lambda} = 1$ zu setzen ist (d. h. 2^{m_λ} ist die *höchste* Potenz von 2, welche $\leqq \lambda$ ist). Alsdann sollen der *ersten* Zeile der herzustellenden Doppelfolge alle a_λ zugeteilt werden, deren Indizes der Bedingung:

$$c_0 = 0$$

genügen, d. h. alle a_λ mit *geradem* Index (einschließlich der 0); der *zweiten* Zeile alle a_λ, für welche:

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 0,$$

d. h. alle diejenigen, deren Index von der Form $\lambda = 4\mu + 1$ ist; der *dritten* Zeile alle a_λ, für welche:

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 0,$$

d. h. alle diejenigen, deren Index von der Form $\lambda = 8\mu + 3$ ist usf. Allgemein: die $(\nu + 1)^{\text{te}}$ Zeile soll aus allen a_λ gebildet werden, für welche

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 1, \quad \cdots, \quad c_{\nu-1} = 1, \quad c_\nu = 0,$$

d. h. aus allen denjenigen, deren Index die Form hat:

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{\nu-1} + c_{\nu+1} \cdot 2^{\nu+1} + \cdots + c_{m_\lambda} \cdot 2^{m_\lambda} \\ &= 2^{\nu+1} \cdot \mu + 2^\nu - 1 \qquad (\mu = 0, 1, 2, \cdots). \end{aligned}$$

Die aus der Folge (a_λ) resultierende Doppelfolge lautet also folgendermaßen:

(4) $$\begin{cases} a_0 & a_2 & a_4 & \cdots a_{2\mu} & \cdots\cdots \\ a_1 & a_5 & a_9 & \cdots a_{4\mu+1} & \cdots\cdots \\ a_3 & a_{11} & a_{19} & \cdots a_{8\mu+3} & \cdots\cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2^\nu - 1} & a_{2^{\nu+1} + 2^\nu - 1} & a_{2^{\nu+1} \cdot 2 + 2^\nu - 1} & \cdots a_{2^{\nu+1} \cdot \mu + 2^\nu - 1} & \cdots\cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{cases}$$

Um die Stelle aufzufinden, an welcher ein beliebiges Glied a_λ der ursprünglichen Folge in der Doppelfolge (4) erscheint, mit anderen Worten, um das irgendeinem *einfachen* Index λ als Doppelindex zugeordnete *Zahlenpaar* (μ, ν) zu bestimmen, ist zunächst λ auf die Form (3) zu bringen. Hat sodann in der Reihe der Koeffizienten $c_0, c_1, c_2, \cdots$ der *erste*, welcher $= 0$ ist, den Index ν, so gehört a_λ der $(\nu + 1)^{\text{ten}}$ Zeile der

Doppelfolge (4) an. Da ferner unter der gemachten Voraussetzung (nämlich $c_0 = c_1 = \cdots = c_{\nu-1} = 1,\ c_\nu = 0$):

$$\lambda = 1 + 2 + \cdots + 2^{\nu-1} + c_{\nu+1} \cdot 2^{\nu+1} + \cdots + c_{m_\lambda} \cdot 2^{m_\lambda},$$

so läßt sich λ in die Form setzen:

$$\lambda = 2^\nu - 1 + 2^{\nu+1} \cdot \mu,$$

wo μ eine *eindeutig bestimmte* natürliche Zahl (mit Einschluß der Null) bedeutet, welche dann anzeigt, daß a_λ der $(\mu+1)^{\text{ten}}$ Kolonne der Doppelfolge (4) angehört.

Umgekehrt: Bezeichnet man mit $a_\mu^{(\nu)}$ dasjenige Glied der Doppelfolge (4), welches in der $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Zeile und der $(\mu+1)^{\text{ten}}$ Kolonne steht, so hat man: $a_\mu^{(\nu)} = a_\lambda$, wenn gesetzt wird: $\lambda = 2^{\nu+1} \cdot \mu + 2^\nu - 1$.

2. Betrachten wir jetzt eine *Doppelfolge* $a_\mu^{(\nu)}$ als die ursprünglich gegebene, so läßt sich zeigen, daß diese stets auch (auf unendlich viele Arten[1])) in eine *einfache* Zahlenfolge umgeformt werden kann, d. h. es lassen sich stets *einfache* Folgen (a_λ) herstellen, welche *jedes* Glied $a_\mu^{(\nu)}$ *ein*mal und *nur* einmal enthalten.

Man erzielt dies am bequemsten, wenn man die Glieder $a_\mu^{(\nu)}$ in Gruppen zusammenfaßt, deren jede alle Glieder mit der *nämlichen* Indexsumme $\mu + \nu = \sigma$ enthält, während σ der Reihe nach die Werte $0, 1, 2, \cdots$ durchläuft, also:

$$(5) \quad a_0^{(0)} \quad a_0^{(1)}\, a_1^{(0)} \quad a_0^{(2)}\, a_1^{(1)}\, a_2^{(0)} \cdots a_0^{(\sigma)}\, a_1^{(\sigma-1)} \cdots a_{\sigma-1}^{(1)}\, a_\sigma^{(0)} \cdots\cdots.$$

Die Vergleichung dieser Anordnung mit dem Schema (2) zeigt, daß man die einfache Folge (5) erhält, wenn man die Glieder der Doppelfolge (2) *„nach Diagonalen"* ordnet, wie durch das folgende Schema verdeutlicht wird:

$$(5\text{a}) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0^{(0)} \;\; a_1^{(0)} \;\; a_2^{(0)} \;\; a_3^{(0)} \cdots \\ \quad\nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow \\ a_0^{(1)} \;\; a_1^{(1)} \;\; a_2^{(1)} \cdots \\ \quad\nearrow \quad \nearrow \\ a_0^{(2)} \;\; a_1^{(2)} \cdots \\ \quad\nearrow \\ a_0^{(3)} \cdots \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \end{array} \right.$$

---

1) Aus der Existenz einer einzigen Umformung einer Doppelfolge in eine einfache ergibt sich ja unmittelbar, daß es deren unbegrenzt viele geben muß, da man ja die Glieder jeder einfachen Folge noch auf unendlich viele Arten permutieren kann.

Eine andere, ebenfalls sehr einfache Vorschrift zur Umformung der Doppelfolge (2) in eine einfache ist die folgende. Man fasse alle diejenigen $a_\mu^{(\nu)}$ zu einer Gruppe zusammen, für welche

$$\begin{array}{lll} \textit{entweder:} & 0 \leqq \mu \leqq \varrho & \nu = \varrho \\ \textit{oder:} & \mu = \varrho & \varrho > \nu \geqq 0. \end{array}$$

Man erhält alsdann die Anordnung:

$$(6) \quad a_0^{(0)} \quad a_0^{(1)}\, a_1^{(1)}\, a_1^{(0)} \quad a_0^{(2)}\, a_1^{(2)}\, a_2^{(2)}\, a_2^{(1)}\, a_2^{(0)} \cdots$$
$$\cdots a_0^{(\varrho)}\, a_1^{(\varrho)} \cdots a_{\varrho-1}^{(\varrho)}\, a_\varrho^{(\varrho)}\, a_\varrho^{(\varrho-1)} \cdots a_\varrho^{(1)}\, a_\varrho^{(0)} \cdots\cdots,$$

welche sich wiederum schematisch in folgender Weise anschaulicher darstellen läßt:

$$(6\mathrm{a}) \quad \left\{ \begin{array}{llll} a_0^{(0)} & a_1^{(0)} & a_2^{(0)} & a_3^{(0)} \;\cdots\cdots \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a_0^{(1)} \rightarrow & a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \;\cdots\cdots \\ & & \uparrow & \uparrow \\ a_0^{(2)} \rightarrow & a_1^{(2)} \rightarrow & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} \;\cdots\cdots \\ & & & \uparrow \\ a_0^{(3)} \rightarrow & a_1^{(3)} \rightarrow & a_2^{(3)} \rightarrow & a_3^{(3)} \;\cdots\cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \end{array} \right.$$

Das vorstehende Ergebnis gestattet noch eine etwas allgemeinere Auffassung, insofern es ja offenbar freisteht, unter den a_λ bzw. $a_\mu^{(\nu)}$ beliebige „*Elemente*" (§ 3, Nr. 1, S. 16) zu verstehen (welche zwar Zahlen sein können, aber nicht zu sein brauchen). Die *einfach unendliche* Folge der a_λ wird alsdann zur *abzählbaren Menge* (§ 25, Nr. 3, S. 151), während die *zweifach unendliche* der $a_\mu^{(\nu)}$ (s. Schema (2)) als eine *abzählbare Menge von abzählbaren Mengen* erscheint. Bezeichnet man eine solche als *zweifach abzählbar*, so läßt sich das Resultat der vorstehenden Betrachtung folgendermaßen aussprechen:

Jede zweifach abzählbare Menge ist (schlechthin) abzählbar.

In Wahrheit erweist sich die früher nachgewiesene Abzählbarkeit der *rationalen Zahlen* (S. 151), bzw. der *positiven echten Brüche* (S. 221) lediglich als ein spezieller Fall dieses Ergebnisses. Setzt man nämlich $a_\mu^{(\nu)} = \frac{\mu+1}{\nu+1}$ und sodann $\mu = 0, 1, 2, \cdots$, $\nu = 0, 1, 2, \cdots$, so nimmt das Schema (2) die folgende Form an:

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \dots\frac{\mu}{1}\dots\dots \\
\frac{1}{2} & \left(\frac{2}{2}\right) & \frac{3}{2} & \left(\frac{4}{2}\right) & \dots\frac{\mu}{2}\dots\dots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \left(\frac{3}{3}\right) & \frac{4}{3} & \dots\frac{\mu}{3}\dots\dots \\
\frac{1}{4} & \left(\frac{2}{4}\right) & \frac{3}{4} & \left(\frac{4}{4}\right) & \dots\frac{\mu}{4}\dots\dots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\frac{1}{\nu} & \frac{2}{\nu} & \frac{3}{\nu} & \frac{4}{\nu} & \dots\frac{\mu}{\nu}\dots\dots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot ,
\end{array}$$

enthält also alle *positiven rationalen* Zahlen und zwar jede noch unendlich oft, nämlich außer jedem reduzierten Bruche $\frac{p}{q}$ noch alle möglichen von der Form $\frac{mp}{mq}$. Schließt man diese letzteren aus (wie in dem obigen Schema durch Einklammern angedeutet ist), so bleibt diejenige Menge zurück, in welcher jede positive rationale Zahl *ein*mal und *nur* einmal vorkommt. Die auf S. 151 gegebene Reihenanordnung der positiven rationalen Zahlen resultiert alsdann, wenn man die obige Doppelfolge nach *Diagonalen* anordnet; während die nach S. 221 (41) vorgenommene Anordnung der positiven echten Brüche zum Vorschein kommt, wenn man nach *Zeilen* ordnet und jedesmal unmittelbar vor der *„Hauptdiagonale"*[1] (welche auch im ersten der beiden betrachteten Fälle, abgesehen von dem Anfangsgliede $\frac{1}{1}$, aus lauter auszuscheidenden Gliedern $\left(\frac{\nu+1}{\nu+1}\right)$ besteht) abbricht.

3. Zerlegt man jede der unendlich vielen *einfachen* Zahlenfolgen, die eine *Doppelfolge* bilden, also z. B. jede *Zeile* des Schemas (2) wiederum in eine *Doppelfolge*, so entsteht eine *dreifach unendliche* Zahlenfolge. Von einer solchen gelangt man in analoger Weise zu *vierfach unendlichen* und so fortfahrend zu *beliebig vielfach*, etwa *p-fach unendlichen* Zahlenfolgen. Das allgemeine Glied einer solchen läßt sich in der Form:

$$(7) \qquad a_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_p}$$

anschreiben, wo jeder der Indizes $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_p$ die unbegrenzte Reihe der Zahlen $0, 1, 2, \cdots$ zu durchlaufen hat und für $\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_p$ *alle mög-*

1) Darunter verstehen wir bei dem allgemeinen Schema (2) die Folge der Glieder:

$$a_0^{(0)},\ a_1^{(1)},\ \cdots,\ a_\nu^{(\nu)},\ \cdots\cdots.$$

lichen Verbindungen zu setzen sind, welche auf diese Weise gebildet werden können.

Wie jede *einfach* unendliche Zahlenfolge (auf unendlich viele Arten) in eine p-*fach* unendliche umgeformt werden kann, so kann auch umgekehrt jede p-*fach* unendliche (auf unendlich viele Arten) in eine *einfach* unendliche verwandelt werden, am einfachsten, wenn man analog verfährt, wie bei der Anordnung einer Doppelfolge nach „*Diagonalen*". Setzt man nämlich:

(8) $$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_p = \sigma,$$

so gibt es, wenn man σ der Reihe nach die Werte $0, 1, 2, \cdots$ beilegt, zu jedem σ immer nur eine bestimmte endliche Anzahl von Zahlenverbindungen $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_p$, welche der Gleichung (8) genügen. Faßt man alle auf Grund der Gleichung (8) durch irgendeine bestimmte Wahl von σ charakterisierten Glieder $a_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_p}$ zu einer Gliedergruppe A_σ zusammen, so enthält die aus den Gliedergruppen $A_0, A_1, A_2, \cdots$ zusammengesetzte, *einfach* unendliche Zahlenfolge *jedes* Glied der p-*fach* unendlichen *ein*mal und *nur* einmal. Jedem Gliede $a_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_p}$ kommt also in dieser einfach unendlichen Zahlenfolge ein bestimmter *Platz* bzw. *Stellenzeiger* zu, wenn man noch die Anordnung der Glieder innerhalb jeder Gruppe durch eine passende Vorschrift festsetzt.

Läßt man wieder an die Stelle der *Zahlen* $a_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_p}$ beliebige *Elemente* treten und bezeichnet die betreffende Menge nach Analogie der oben für den Fall $p = 2$ bereits eingeführten Ausdrucksweise als eine p-*fach abzählbare*, so ergibt sich:

Jede p-fach abzählbare Menge ist (schlechthin) abzählbar.

§ 40. Grenzwerte konvergenter und eigentlich divergenter Doppelfolgen. — Monotone Doppelfolgen.

1. Wir sagen, die *Doppelfolge*

(1) $$\begin{cases} a_0^{(0)}\ a_1^{(0)} \cdots a_\mu^{(0)} \cdots\cdots \\ a_0^{(1)}\ a_1^{(1)} \cdots a_\mu^{(1)} \cdots\cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_0^{(\nu)}\ a_1^{(\nu)} \cdots a_\mu^{(\nu)} \cdots\cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

oder kürzer: die *Doppelfolge* $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$, wo die $a_\mu^{(\nu)}$ *beliebige reelle* Zahlen vorstellen, besitze den *endlichen Grenzwert* A für *gleichzeitig* und *unabhängig*

voneinander ins Unendliche wachsende μ und ν, oder kürzer: sie besitze für $\mu \longrightarrow \infty$, $\nu \longrightarrow \infty$ den *Doppellimes* A, in Zeichen:

(2) $$\lim_{\mu, \nu \to \infty} a_\mu^{(\nu)} = A,$$

wenn eine bestimmte Zahl A von der Beschaffenheit existiert, daß bei beliebig (klein) vorgeschriebenem $\varepsilon > 0$ und passender Wahl zweier natürlicher Zahlen n_1, n_2 die Beziehung besteht[1]):

(2a) $$\left| a_\mu^{(\nu)} - A \right| \leqq \varepsilon \quad \text{für: } \mu \geqq n_1, \ \nu \geqq n_2.$$

Diese Bedingung läßt sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit auch durch folgende ersetzen:

(2b) $$\left| a_\mu^{(\nu)} - A \right| \leqq \varepsilon \quad \text{für: } \left.\begin{matrix}\mu \\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq n.$$

Denn die letztere ist einerseits als spezieller Fall in (2a) enthalten, nämlich wenn $n_1 = n_2$; ist dagegen $n_1 \lessgtr n_2$, so läßt sich (2a) in (2b) überführen, indem man die *kleinere* der beiden Zahlen n_1, n_2 durch die *größere* ersetzt und diese mit n bezeichnet.

Man erkennt analog, wie im Falle der Grenzwertexistenz für eine *einfache* Zahlenfolge[2]), daß es, wenn überhaupt, immer nur *eine einzige* Zahl A von der obigen Beschaffenheit gibt.

Wir sagen ferner, der *Doppellimes* der Folge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ sei $+\infty$ bzw. $-\infty$, in Zeichen:

(3) $$\lim_{\mu, \nu \to \infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty \quad \text{bzw.} \quad = -\infty,$$

wenn zu jedem (beliebig großen) $A > 0$ zwei natürliche Zahlen n_1, n_2 existieren, derart, daß:

(3a) $$a_\mu^{(\nu)} > A \quad \text{bzw.} \quad < -A \quad \text{für: } \mu \geqq n_1, \ \nu \geqq n_2.$$

Dabei steht es wiederum frei, diese Bedingungen auch durch die folgenden zu ersetzen:

(3b) $$a_\mu^{(\nu)} > A \quad \text{bzw.} \quad < -A \quad \text{für: } \left.\begin{matrix}\mu \\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq n.$$

---

1) Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Bedingung für die Existenz eines endlichen Doppellimes *keinerlei* Forderung in bezug auf diejenigen Glieder enthält, bei denen mindestens einer der beiden Stellenzeiger $\mu < n_1$ oder $\nu < n_2$, d. h. in bezug auf die Glieder einer beliebigen *endlichen* Anzahl von *Zeilen* und *Kolonnen*. Dieselben brauchen insbesondere nicht einmal numerisch unter einer endlichen Schranke zu bleiben, was nur für diejenigen Glieder als *notwendig* sich ergibt, bei denen *beide* Indizes gewisse Zahlen überschreiten. Man kann hiernach einer Doppelfolge mit dem Doppellimes A eine beliebige *endliche* Anzahl ganz willkürlich, z. B. eigentlich divergenter Zeilen und Kolonnen hinzufügen, ohne daß die Existenz jenes Doppellimes A irgendwelche Änderung erleidet.

2) S. § 26, Nr. 1 (S. 161).

Die durch die Gleichungen (2) und (3) charakterisierten Möglichkeiten fassen wir (analog wie bei einfachen Zahlenfolgen — s. § 26, Nr. 4 am Schlusse, S. 165) nach Bedarf durch die Aussage zusammen, daß $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$, also der *Doppellimes* der Folge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ *im weiteren Sinne existiere.*

2. Analog wie für einfache Zahlenfolgen (s. § 28, Nr. 1, S. 167) gilt der folgende Satz:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines endlichen $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$ *besteht in der Konvergenz der Doppelfolge* $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$. *Die letztere heißt konvergent, wenn sie bei jedem* $\varepsilon > 0$ *einer der folgenden in ihrer Tragweite im wesentlichen*[1]) *gleichwertigen Bedingungen genügt*[2]):

$$\text{(I)}\qquad \left|a_\mu^{(\nu)} - a_n^{(n)}\right| \leqq \varepsilon \qquad \text{für: } \left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq n$$

$$\text{(II)}\qquad \left|a_{\nu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_\nu^{(\nu)}\right| \leqq \varepsilon \quad \text{für:}\quad \nu \geqq n \begin{cases}\varrho = 0, 1, 2, \cdots\cdots\\ \sigma = 0, 1, 2, \cdots\cdots\end{cases}$$

$$\text{(III)}\qquad \left|a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_\mu^{(\nu)}\right| \leqq \varepsilon \quad \text{für:} \begin{cases}\mu \geqq n_1 & \varrho = 0, 1, 2, \cdots\cdots\\ \nu \geqq n_2 & \sigma = 0, 1, 2, \cdots\cdots.\end{cases}$$

Beweis. Da die Bedingung (II) durch Spezialisierung aus (III) hervorgeht (nämlich, indem man $\mu = \nu$ setzt) und eine weitere Spezialisierung die Bedingung (II) in (I) überführt (indem man zunächt $\nu = n$ setzt und sodann μ, ν statt $n + \varrho$, $n + \sigma$ schreibt), so genügt es offenbar nachzuweisen, daß die formal die stärkste Forderung enthaltende Bedingung (III) eine *notwendige*, die am wenigsten verlangende Bedingung (I) schon eine *hinreichende* für die Existenz eines endlichen *Doppellimes* ist.

Angenommen, es sei in der Tat $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$ eine bestimmte Zahl A, so läßt sich zu beliebigem $\varepsilon > 0$ nach Ungl. (2a) n_1, n_2 so fixieren, daß:

$$\left|a_\mu^{(\nu)} - A\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für: } \mu \geqq n_1,\ \nu \geqq n_2$$

---

1) D. h. abgesehen davon, daß die in allen drei Ungleichungen mit ε bezeichnete Zahl zwar dieselbe bleibt, wenn man die Formeln (I) und (II) durch Spezialisierung aus (III) herleitet (s. den im Text gegebenen Beweis), dagegen in (III) durch 2ε zu ersetzen ist, wenn man von Ungl. (I) oder (II) zu (III) gelangt. Vgl. im übrigen die analogen Betrachtungen, die sich auf die Konvergenz einfach unendlicher Zahlenfolgen beziehen: § 22, Nr. 1 (S. 125, 126).

2) Wie die Form dieser Bedingungen unmittelbar zeigt, gilt auch hier eine analoge Bemerkung, wie die in Fußnote 1 der vorigen Seite gemachte.

und daher auch:

$$\left|a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - A\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für:} \begin{cases} \mu \geqq n_1, & \varrho = 0, 1, 2, \cdots\cdots \\ \nu \geqq n_2, & \sigma = 0, 1, 2, \cdots\cdots, \end{cases}$$

sodaß durch Kombination dieser beiden Ungleichungen unmittelbar die Bedingung (III) als eine *notwendige* für die Existenz eines endlichen $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$ resultiert.

Wird andererseits das Bestehen der Bedingung (I) vorausgesetzt, so muß zu jedem $\varepsilon > 0$ sich zunächst m so fixieren lassen, daß:

$$(4) \qquad \left|a_\mu^{(\nu)} - a_m^{(m)}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für:} \left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq m,$$

und man hat daher speziell für $\mu = \nu$:

$$(5) \qquad \left|a_\nu^{(\nu)} - a_m^{(m)}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für:} \ \nu \geqq m.$$

Diese letzte Ungleichung besagt aber, daß die *einfache* Zahlenfolge $\left(a_\nu^{(\nu)}\right)$ [1]) *konvergent* ist, also einen *bestimmten Grenzwert* besitzt, etwa:

$$(6) \qquad \lim_{\nu\to\infty} a_\nu^{(\nu)} = A.$$

Infolgedessen läßt sich $n \geqq m$ so auswählen, daß:

$$(7) \qquad \left|a_\nu^{(\nu)} - A\right| \leqq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für:} \ \nu \geqq n.$$

Alsdann ergibt sich aber:

$$a_\mu^{(\nu)} - A = \left(a_\mu^{(\nu)} - a_m^{(m)}\right) + \left(a_m^{(m)} - a_n^{(n)}\right) + \left(a_n^{(n)} - A\right)$$

also:

$$\left|a_\mu^{(\nu)} - A\right| \leqq \left|a_\mu^{(\nu)} - a_m^{(m)}\right| + \left|a_n^{(n)} - a_m^{(m)}\right| + \left|a_n^{(n)} - A\right|,$$

d. h. schließlich mit Benützung von Ungl. (4), (5), (7):

$$\left|a_\mu^{(\nu)} - A\right| \leqq \varepsilon \quad \text{für:} \left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq n$$

und somit nach Definition (2b):

$$(8) \qquad \lim_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = A \quad \left(\text{d. h.} = \lim_{\nu\to\infty} a_\nu^{(\nu)}\right),$$

womit die ausgesprochene Behauptung bewiesen ist. —

---

1) Dieselbe besteht offenbar aus den Gliedern der *Hauptdiagonale* des Doppelfolgenschemas (1).

Sind hiernach *konvergente* Doppelfolgen identisch mit denjenigen, für die ein *endlicher* Doppellimes existiert[1]), so sollen andererseits, wiederum entsprechend einer analogen Festsetzung für einfache Folgen (s. S. 164), Doppelfolgen mit (positiv oder negativ) *unendlichem* Doppellimes als *eigentlich divergent* bezeichnet werden.

3. Eine Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ heißt *monoton* und zwar *niemals ab-* bzw. *niemals zunehmend*, wenn *durchweg* (d. h. für $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} = 0, 1, 2, \cdots$, $\left.\begin{matrix}\varrho\\ \sigma\end{matrix}\right\} = 0, 1, 2, \cdots$):

$$(9) \qquad a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_\mu^{(\nu)} \geqq 0 \quad \text{bzw.} \quad a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_\mu^{(\nu)} \leqq 0.$$

Ist eine dieser Bedingungen nur *von einer bestimmten „Stelle“* ab, d. h. etwa für $\mu \geqq n_1$, $\nu \geqq n_2$ (dagegen: $\left.\begin{matrix}\varrho\\ \sigma\end{matrix}\right\} = 0, 1, 2, \cdots$) erfüllt, so soll die Doppelfolge als *schließlich monoton* bezeichnet werden. Für solche Doppelfolgen gilt der Satz:

Eine schlechthin oder schließlich monotone Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ ist entweder konvergent oder eigentlich divergent. Für das Eintreten des erstgenannten Falles ist notwendig und hinreichend, daß die $\left|a_\mu^{(\nu)}\right|$ schließlich, d. h. etwa für $\mu \geqq n_1$, $\nu \geqq n_2$, unter einer positiven Zahl a bleiben.

Beweis. Es sei die betreffende Doppelfolge zum mindesten für $\mu \geqq n_1$, $\nu \geqq n_2$ monoton und zwar etwa *niemals abnehmend*, sodaß also:

$$(9\text{a}) \qquad a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_\mu^{(\nu)} \geqq 0 \quad \text{für: } \mu \geqq n_1,\ \nu \geqq n_2,\ \left.\begin{matrix}\varrho\\ \sigma\end{matrix}\right\} = 0, 1, 2, \cdots.$$

Sei dann zunächst $\left|a_\mu^{(\nu)}\right| < g$ etwa in demselben Umfange. Daß eine derartige Bedingung für Konvergenz *notwendig* erscheint, steht bereits fest (vgl. § 26, S. 164, Fußn. 1). Daß sie auch *hinreichend* ist, erkennt man folgendermaßen. Aus der Voraussetzung (9a) ergibt sich speziell für $\mu = \nu$, $\varrho = \sigma$:

$$\left.\begin{matrix} a_{\nu+\sigma}^{(\nu+\sigma)} - a_\nu^{(\nu)} \geqq 0 \\ \text{außerdem hat man:} \\ \left|a_\nu^{(\nu)}\right| < a \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix}\text{für } \nu \geqq n' \text{ (wo } n' \text{ die größere der beiden Zahlen } n_1, n_2 \text{ bedeutet)} \\ \left.\begin{matrix}\varrho\\ \sigma\end{matrix}\right\} = 0, 1, 2, \cdots.\end{matrix}$$

---

1) Daraus folgt wiederum, daß bei einer *konvergenten* Doppelfolge die $\left|a_\mu^{(\nu)}\right|$ nur unter einer endlichen Schranke zu bleiben brauchen, sofern *beide* Indizes μ, ν gewisse Zahlen überschreiten.

Die einfache und für $\nu \geqq n'$ monotone Zahlenfolge $\left(a_\nu^{(\nu)}\right)$ ist also *konvergent*[1]), sodaß man setzen kann:

(10) $$\lim_{\nu \to \infty} a_\nu^{(\nu)} = A.$$

Man hat sodann für jedes $\nu > n'$:

(11) $$a_\nu^{(\nu)} \leqq A,$$

andererseits zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ bei passender Wahl von $n \geqq n'$:

(12) $$a_n^{(n)} > A - \varepsilon.$$

Ist jetzt $\mu > n$, $\nu > n$, so folgt aus der Voraussetzung (9):

$$a_n^{(n)} \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq a_{\mu+\nu}^{(\mu+\nu)},$$

also mit Berücksichtigung von Ungl. (11) und (12):

$$A - \varepsilon < a_\mu^{(\nu)} \leqq A$$

und, da es freisteht, ε unbegrenzt zu verkleinern, schließlich:

(13) $$\lim_{\mu, \nu \to \infty} a_\mu^{(\nu)} = A.$$

Bleiben die $\left|a_\mu^{(\nu)}\right|$ für $\mu \geqq n_1$, $\nu \geqq n_2$ *nicht* unter einer endlichen Schranke, so müssen, wenn die Doppelfolge wieder für $\mu \geqq n_1$, $\nu \geqq n_2$ eine *niemals abnehmende* ist, für hinlänglich große μ und ν nicht nur die $\left|a_\mu^{(\nu)}\right|$, sondern die $a_\mu^{(\nu)}$ selbst jede noch so große positive Zahl übersteigen, sodaß sich ergibt:

(14) $$\lim_{\mu, \nu \to \infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty.$$

Für eine schließlich *niemals zunehmende* Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ findet man die analogen Resultate, indem man von der Bemerkung Gebrauch macht, daß in diesem Falle die Doppelfolge $\left(-a_\mu^{(\nu)}\right)$ eine schließlich *niemals abnehmende* ist. Infolgedessen ergibt sich zunächst:

(15) $$\lim_{\mu, \nu \to \infty} \left(-a_\mu^{(\nu)}\right) = A\,^{2)} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\mu, \nu \to \infty} \left(-a_\mu^{(\nu)}\right) = +\infty,$$

je nachdem die $\left|a_\mu^{(\nu)}\right|$ schließlich unter einer endlichen Schranke bleiben oder nicht, und daher entsprechend:

(16) $$\lim_{\mu, \nu \to \infty} a_\mu^{(\nu)} = -A \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\mu, \nu \to \infty} a_\mu^{(\nu)} = -\infty.$$

---

1) S. § 22, Nr. 6 (S. 180).

2) Dabei kann A eine positive oder negative Zahl sein.

Zusatz. Ist $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ eine beliebige Doppelfolge, für welche $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$ im weiteren Sinne *existiert*, so hat man allemal: $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu^{(\nu)}$, da es ja unter der gemachten Voraussetzung freisteht, speziell $\mu = \nu$ zu setzen. Dagegen gestattet umgekehrt die bloße Existenz von $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu^{(\nu)}$ noch keinen Schluß auf diejenige von $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$. Ist dagegen die Doppelfolge eine schließlich *monotone*, so ist, wie eben bewiesen, $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$ stets im weiteren Sinne vorhanden und somit *endlich* oder *unendlich* je nach der Beschaffenheit von $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu^{(\nu)}$. Man kann daher dem oben bewiesenen Satze über monotone Doppelfolgen auch die folgende Fassung geben:

Eine zum mindesten schließlich monotone Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ ist stets konvergent oder eigentlich divergent und zwar das eine oder das andere, je nachdem $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu^{(\nu)}$ endlich oder unendlich ausfällt.

§ 41. Die Hauptlimites einer Doppelfolge (unterer und oberer Doppellimes). — Uneigentlich divergente Doppelfolgen.

1. Wenn man die ersten m Zeilen und die ersten n Kolonnen der Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ (wo $\mu = 0, 1, 2, \cdots$; $\nu = 0, 1, 2, \cdots$) wegläßt, so resultiert die Doppelfolge:

$$\begin{array}{lllll} a_m^{(n)} & a_{m+1}^{(n)} & \cdots\, a_{m+\varrho}^{(n)} & \cdots\cdots \\ a_m^{(n+1)} & a_{m+1}^{(n+1)} & \cdots\, a_{m+\varrho}^{(n+1)} & \cdots\cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_m^{(n+\sigma)} & a_{m+1}^{(n+\sigma)} & \cdots\, a_{m+\varrho}^{(n+\sigma)} & \cdots\cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\,, \end{array}$$

welche wir mit $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)_m^n$ bezeichnen wollen. Bei Festhaltung dieser Schreibweise würde also der ursprünglichen, mit dem Gliede $a_0^{(0)}$ beginnenden Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ die ausführlichere Bezeichnung $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)_0^0$ zukommen.

Die Glieder der Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)_m^n$, die man ja auch als *einfache* Folge ordnen könnte, besitzen nach § 35, Nr. 1—3 (S. 209—212) eine gewisse *untere Grenze* $g_m^{(n)}$ und eine gewisse *obere Grenze* $G_m^{(n)}$ in dem

Sinne, daß $g_m^{(n)}$, $G_m^{(n)}$ entweder *bestimmte Zahlen* vorstellen oder auch $g_m^{(n)}$ die Bedeutung von $-\infty$, $G_m^{(n)}$ diejenige von $+\infty$ haben kann.[1])

Werden von der Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)_m^n$ noch weitere Anfangszeilen bzw. -kolonnen weggelassen, mit anderen Worten, geht man von $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)_m^n$ zu $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)_{m+\varrho}^{n+\sigma}$ über (wobei *eine* der Zahlen ϱ, σ auch $=0$ sein könnte), so kann die *untere* Grenze in keinem Falle noch tiefer sinken, also *niemals abnehmen*, entsprechend die *obere* Grenze *niemals zunehmen*, sodaß also stets:

$$(1)\qquad g_{m+\varrho}^{(n+\sigma)} \geqq g_m^{(n)}, \quad G_{m+\varrho}^{(n+\sigma)} \leqq G_m^{(n)} \quad \begin{pmatrix} \varrho = 0, 1, 2, \cdots \\ \sigma = 0, 1, 2, \cdots \end{pmatrix},$$

sofern man im Falle $g_m^{(n)} = -\infty$ bzw. $G_m^{(n)} = +\infty$ einer Ungleichung von der Form[2]):

$$g_{m+\varrho}^{(n+\sigma)} > -\infty \quad \text{bzw.} \quad G_{m+\varrho}^{(n+\sigma)} < +\infty$$

die Bedeutung beilegt: $g_{m+\varrho}^{(n+\sigma)}$ ist *nicht* negativ-unendlich, bzw. $G_{m+\varrho}^{(n+\sigma)}$ ist *nicht* positiv-unendlich (also nach Lage der Sache $g_{m+\varrho}^{(n+\sigma)}$ bzw. $G_{m+\varrho}^{(n+\sigma)}$ eine *bestimmte Zahl*).

Macht man die Einschränkung, daß *alle* $\left|a_\mu^{(\nu)}\right|$ unter einer positiven Zahl A bleiben, so hat man offenbar für jede Wahl von m und n: $g_m^{(n)} \geqq -A$, $G_m^{(n)} \leqq A$, also beide *endlich*. Ist die fragliche Bedingung, *wie wir jetzt ausdrücklich annehmen wollen*, zum mindesten für $\mu \geqq m'$, $\nu \geqq m'$ erfüllt, so besteht für $g_m^{(n)}$, $G_m^{(n)}$ die entsprechende Folgerung, sobald $m \geqq m'$, $n \geqq m'$. Alsdann sind aber:

$$(2)\qquad \left\{ \begin{matrix} g_n^{(n)} & g_{(n+1)}^{(n+1)} & \cdots & g_\nu^{(\nu)} & \cdots\cdots \\ G_n^{(n)} & G_{n+1}^{(n+1)} & \cdots & G_\nu^{(\nu)} & \cdots\cdots \end{matrix} \right\} \quad (\nu \geqq n \geqq m')$$

zwei unbegrenzt fortsetzbare, aus bestimmten Zahlen bestehende Folgen, deren erste eine *niemals abnehmende*, deren zweite eine *niemals zunehmende* ist und die somit, da überdies ihre Glieder numerisch unterhalb A bleiben, *konvergieren*. Man kann daher setzen:

$$(3)\qquad \lim_{\nu \to \infty} g_\nu^{(\nu)} = l, \quad \lim_{\nu \to \infty} G_\nu^{(\nu)} = L,$$

---

1) Die *untere* und *obere Grenze* einer Zahlenfolge, d. h. einer *geordneten abzählbaren* Zahlenmenge sind, wie aus der Definition dieser Begriffe hervorgeht, offenbar von der *Anordnung* der betreffenden Zahlen *unabhängig* und kommen also schließlich der betreffenden abzählbaren Zahlenmenge als solcher zu.

2) Vgl. § 36, Ungl. (40) (S. 220).

wo l, L *bestimmte Zahlen* vorstellen und, wegen $g_\nu^{(\nu)} \leqq G_\nu^{(\nu)}$ stets:

(4) $$l \leqq L$$

ist. Wir bezeichnen diese beiden (unter Umständen in eine einzige zusammenfallenden) Zahlen als die beiden *Hauptlimites* der *Doppelfolge* $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$, insbesondere l als den *unteren*, L als den *oberen Doppellimes* $a_\mu^{(\nu)}$ (sc. für $\mu \longrightarrow \infty$, $\nu \longrightarrow \infty$) und bedienen uns der Schreibweise:

(5) $$\begin{cases} \underline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = l, \\ \overline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = L. \end{cases}$$

Da übrigens nach Ungl. (1) auch die beiden *Doppelfolgen* $\left(g_\mu^{(\nu)}\right)_{m'}^{m'}$, $\left(G_\mu^{(\nu)}\right)_{m'}^{m'}$ *monoton* sind, so hat man nach dem Satze von Nr. 3 des vorigen Paragraphen (Gl. (10) und (13), S. 258):

(6) $$\lim_{\mu,\nu\to\infty} g_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} g_\nu^{(\nu)}, \quad \lim_{\mu,\nu\to\infty} G_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} G_\nu^{(\nu)},$$

und man könnte daher l bzw. L auch definieren als den *Doppellimes* der *Doppelfolge* $\left(g_\mu^{(\nu)}\right)$ bzw. $\left(G_\mu^{(\nu)}\right)$.

2. Wir zeigen, daß die soeben eingeführten *Hauptlimites* einer *Doppelfolge* zu deren Gliedern $a_\mu^{(\nu)}$ (von welchen vorausgesetzt wurde, daß sie zum mindesten für $\mu \geqq m'$, $\nu \geqq m'$ numerisch unter einer endlichen positiven Zahl bleiben) in analogen Beziehungen stehen, wie die *Hauptlimites* einer *einfachen* Zahlenfolge zu den Gliedern dieser letzteren (s. § 36, S. 213), nämlich:

1) *Jedem beliebig klein vorgeschriebenen* $\varepsilon > 0$ *läßt sich eine natürliche Zahl* m *so zuordnen, daß durchweg:*

(7) $$l - \varepsilon < a_\mu^{(\nu)} < L + \varepsilon, \quad \textit{wenn:} \left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq m,$$

mit anderen Worten, alle Glieder der Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)_m^m$, *also derjenigen, welche nach Weglassung der ersten* m *Zeilen und* m *Kolonnen der Folge* $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)_0^0$ *übrig bleibt, liegen innerhalb des Zahlenintervalls* $(l-\varepsilon,\ L+\varepsilon)$.

2) *Zu jedem beliebig kleinen* $\varepsilon > 0$ *und beliebig großen* n *existieren (unendlich viele) Zahlenpaare* $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq n$, *bzw.* $\left.\begin{matrix}\varrho\\ \sigma\end{matrix}\right\} \geqq n$, *sodaß:*

(8) $$l - \varepsilon < a_\mu^{(\nu)} < l + \varepsilon, \quad L - \varepsilon < a_\varrho^{(\sigma)} < L + \varepsilon.$$

Insbesondere existieren daher zu jeder beständig abnehmenden Folge

positiver Zahlen ε_ν *mit dem Grenzwerte* 0 *monoton ins Unendliche wachsende Folgen natürlicher Zahlen* m_ν *und* n_ν, *bzw.* r_ν *und* s_ν, *derart, daß:*

$$(9)\quad l-\varepsilon_\nu < a_{m_\nu}^{(n_\nu)} < l+\varepsilon_\nu, \quad L-\varepsilon_\nu < a_{r_\nu}^{(s_\nu)} < L+\varepsilon_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots).$$

Beweis zu 1). Auf Grund der für l und L geltenden Definitionsgleichungen (3) muß sich zu jedem $\varepsilon > 0$ ein m so fixieren lassen, daß:

$$(10)\qquad l-\varepsilon < g_m^{(m)} < l+\varepsilon, \quad L-\varepsilon < G_m^{(m)} < L+\varepsilon.$$

Andererseits hat man infolge der Bedeutung von $g_m^{(m)}$ bzw. $G_m^{(m)}$ als *untere* bzw. *obere* Grenze der Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)_m^m$:

$$(11)\qquad g_m^{(m)} \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq G_m^{(m)} \quad \text{für: } \left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq m.$$

Somit ergibt sich, wie in (7) behauptet:

$$l-\varepsilon < a_\mu^{(\nu)} < L+\varepsilon \quad \text{für: } \left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq m.$$

Beweis zu 2). Zu jedem $\varepsilon > 0$ läßt sich wiederum auf Grund der Definitionsgleichung (3) ein n' so fixieren, daß für jedes $n \geqq n'$:

$$(12)\qquad l-\frac{\varepsilon}{2} \leqq g_n^{(n)} \leqq l+\frac{\varepsilon}{2}, \quad L-\frac{\varepsilon}{2} \leqq G_n^{(n)} \leqq L+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Andererseits muß es infolge der Bedeutung von $g_n^{(n)}$ bzw. $G_n^{(n)}$, wie *groß* auch n angenommen werden möge, *mindestens ein* Glied $a_\mu^{(\nu)}$ bzw. $a_\varrho^{(\sigma)}$, wo: $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq n$, $\left.\begin{matrix}\varrho\\ \sigma\end{matrix}\right\} \geqq n$, geben, derart, daß:

$$g_n^{(n)} \leqq a_\mu^{(\nu)} < g_n^{(n)} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad G_n^{(n)} - \frac{\varepsilon}{2} < a_\varrho^{(\sigma)} \leqq G_n^{(n)},$$

also:

$$(13)\quad g_n^{(n)} - \frac{\varepsilon}{2} < a_\mu^{(\nu)} < g_n^{(n)} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad G_n^{(n)} - \frac{\varepsilon}{2} < a_\varrho^{(\sigma)} < G_n^{(n)} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Durch Kombination der Ungleichungen (12), (13) ergibt sich daher:

$$(14)\qquad l-\varepsilon < a_\mu^{(\nu)} < l+\varepsilon, \quad L-\varepsilon < a_\varrho^{(\sigma)} < L+\varepsilon$$

für mindestens ein Wertepaar $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq n$, bzw. $\left.\begin{matrix}\varrho\\ \sigma\end{matrix}\right\} \geqq n$, wie *groß* auch n angenommen werden möge[1]), also genau im Sinne der Behauptung (8).

---

1) In Wahrheit gibt es dann unendlich viele solche Wertepaare (μ, ν) bzw. (ϱ, σ), da es ja andernfalls ein *letztes* geben müßte, sodaß es nicht mehr freistünde, n noch weiter zu vergrößern.

Bedeutet jetzt (ε_ν) eine monotone Folge positiver Zahlen mit dem Grenzwerte $\lim_{\nu\to\infty}\varepsilon_\nu = 0$, so sei zunächst $a_{m_0}^{(n_0)}$ *irgendein bestimmtes*, auf Grund der ersten Ungleichung (14) *sicher vorhandenes* Glied der Doppelfolge, welches der Bedingung genügt:

$$l-\varepsilon_0 < a_{m_0}^{(n_0)} < l+\varepsilon_0 .$$

Wird dann eine natürliche Zahl $p_0 > \begin{cases} m_0 \\ n_0 \end{cases}$ angenommen, so ergibt sich wiederum aus der ersten Ungleichung (14) die Existenz eines Wertepaares $\left.\begin{matrix} m_1 \\ n_1 \end{matrix}\right\} \geqq p_0$, also: $\begin{matrix} m_1 > m_0 \\ n_1 > n_0, \end{matrix}$ von der Beschaffenheit, daß:

$$l-\varepsilon_1 < a_{m_1}^{(n_1)} < l+\varepsilon_1 .$$

Daraus folgt in analoger Weise:

$$l-\varepsilon_2 < a_{m_2}^{(n_2)} < l+\varepsilon_2, \quad \text{wo:} \quad \begin{cases} m_2 > m_1 \\ n_2 > n_1, \end{cases}$$

und bei Fortsetzung dieses Schlußverfahrens allgemein:

$$l-\varepsilon_\nu < a_{m_\nu}^{(n_\nu)} < l+\varepsilon_\nu, \quad \text{wo:} \quad \begin{cases} m_\nu > m_{\nu-1} \\ n_\nu > n_{\nu-1} \end{cases} \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots).$$

Ganz analog ergibt sich dann aus der zweiten der Ungleichungen (14):

$$L-\varepsilon_\nu < a_{r_\nu}^{(s_\nu)} < L+\varepsilon_\nu, \quad \text{wo:} \quad \nu \geqq 0 \quad \text{und:} \quad \begin{cases} r_\nu > r_{\nu-1} \\ s_\nu > s_{\nu-1} \end{cases} \text{für } \nu = 1, 2, 3, \cdots.$$

Damit ist dann auch die Behauptung (9) vollständig bewiesen.

3. Wir lassen jetzt die Beschränkung fallen, daß die $\left|a_\mu^{(\nu)}\right|$ für $\left.\begin{matrix} \mu \\ \nu \end{matrix}\right\} \geqq m'$ unter einer endlichen Schranke bleiben sollen. Dabei werde zunächst angenommen, daß zu jedem beliebig *großen* $A > 0$ Glieder $a_\mu^{(\nu)} > A$ vorhanden sind, bei denen $\left.\begin{matrix} \mu \\ \nu \end{matrix}\right\} \geqq n$, wie *groß* auch n angenommen werden möge. Alsdann ist offenbar $+\infty$ die *obere* Grenze der $a_\mu^{(\nu)}$ und zwar auch nach Weglassung beliebig vieler Zeilen und Kolonnen, sodaß also an die Stelle der in (2) mit

$$G_n^{(n)}\; G_{n+1}^{(n+1)} \cdots G_\nu^{(\nu)} \cdots\cdots$$

bezeichneten Folge eine solche aus lauter Symbolen $+\infty$ tritt und somit

auch der a. a. O. mit L bezeichnete Limes dieser Folge durch $+\infty$ zu ersetzen ist, d. h. man hat in diesem Falle:

(15)
$$\overline{\lim_{\mu,\nu\to\infty}} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} G_\nu^{(\nu)} = +\infty.$$

Enthält dann die Doppelfolge für $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq n$ *nur* solche $a_\mu^{(\nu)}$, die *oberhalb* einer gewissen (negativen) Zahl bleiben, außerdem, wie *groß* auch n angenommen werden möge, stets auch solche $a_\mu^{(\nu)}$, die *numerisch unter* einer gewissen endlichen Schranke bleiben, so erleidet das in Nr. 1 dieses Paragraphen bezüglich der *unteren* Grenzen $g_\nu^{(\nu)}$ und des *unteren* Doppellimes gesagte offenbar keine Änderung, und es ergibt sich demnach, wie früher:

$$\underline{\lim_{\mu,\nu\to\infty}} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} g_\nu^{(\nu)} = l \quad (\text{d. h. } \textit{endlich}).$$

Im übrigen treten in dem vorliegenden Falle an die Stelle der in Nr. 2 gemachten Aussagen die folgenden:

Ist:
$$\underline{\lim_{\mu,\nu\to\infty}} a_\mu^{(\nu)} = l, \quad \overline{\lim_{\mu,\nu\to\infty}} a_\mu^{(\nu)} = +\infty,$$

so besitzen die Glieder der Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ *die folgenden Eigenschaften:*

1) *Jedem* $\varepsilon > 0$ *läßt sich ein* m *so zuordnen, daß durchweg:*

(7a)
$$l - \varepsilon < a_\mu^{(\nu)} < +\infty, \quad \textit{wenn:} \left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq m.$$

2) *Zu jedem beliebig kleinen* $\varepsilon > 0$, *beliebig großen* $A > 0$ *und beliebig großen* n *existieren (unendlich viele) Zahlenpaare* $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq n$ *bzw.* $\left.\begin{matrix}\varrho\\ \sigma\end{matrix}\right\} \geqq n$, *sodaß:*

(8a)
$$l - \varepsilon < a_\mu^{(\nu)} < l + \varepsilon, \quad a_\varrho^{(\sigma)} > A.$$

Insbesondere existieren zu jeder positiven monoton gegen 0 *konvergierenden Folge* (ε_ν) *und zu jeder monoton nach* $+\infty$ *divergierenden Folge* (A_ν) *monoton ins Unendliche wachsende Folgen natürlicher Zahlen* m_ν, n_ν *bzw.* r_ν, s_ν, *derart daß:*

(9a)
$$l - \varepsilon_\nu < a_{m_\nu}^{(n_\nu)} < l + \varepsilon_\nu, \quad a_{r_\nu}^{(s_\nu)} > A_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots).$$

Die vorstehenden Aussagen, soweit sie sich auf den *unteren* Doppellimes l beziehen, bedürfen keiner näheren Begründung mehr. Das gleiche gilt von dem zweiten, auf das Auftreten von $+\infty$ als *oberen* Doppel-

limes bezüglichen Teil von Ungl. (7a), da dieser ja lediglich etwas in *jedem* Falle selbstverständliches aussagt. Im übrigen bemerke man, daß die Voraussetzung $\overline{\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty}} a_\mu^{(\nu)} = +\infty$, d. h. $\lim\limits_{\nu\to\infty} G_\nu^{(\nu)} = +\infty$ die Beziehung $G_\nu^{(\nu)} = +\infty$ für *jedes* endliche ν involviert, da ja in jedem Falle die Folge der $G_\nu^{(\nu)}$ ($\nu = 0, 1, 2, \cdots$) eine *niemals zunehmende* ist. Hieraus resultiert aber ohne weiteres die Richtigkeit der in der zweiten Ungleichung (8a) enthaltenen Aussage. Der Übergang von Ungleichung (8a) zu der entsprechenden in (9a) kann dann (abgesehen von der als selbstverständlich sich ergebenden Abänderung) in ganz analoger Weise vollzogen werden, wie derjenige von Ungleichung (8) zu Ungleichung (9).

Auch bietet es nicht die geringste Schwierigkeit, das obige Resultat in entsprechend modifizierter Form auf die Fälle:

(16) $$\underline{\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty}} a_\mu^{(\nu)} = -\infty, \quad \overline{\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty}} a_\mu^{(\nu)} = L \quad \text{(d. h. } \textit{endlich}\text{)}$$

und:

(17) $$\underline{\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty}} a_\mu^{(\nu)} = -\infty, \quad \overline{\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty}} a_\mu^{(\nu)} = +\infty$$

zu übertragen.

4. Es bleibt noch die Möglichkeit in Betracht zu ziehen, daß der *untere* und *obere* Doppellimes zusammenfallen. Ist zunächst:

(18) $$\underline{\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty}} a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty}} a_\mu^{(\nu)} = A \quad \text{(d. h. } \textit{endlich}\text{)},$$

so geht die Beziehung (7) (S. 261) in die folgende über:

$$A - \varepsilon < a_\mu^{(\nu)} < A + \varepsilon, \quad \text{d. h.} \quad \left|a_\mu^{(\nu)} - A\right| < \varepsilon, \quad \text{für: } \left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq m,$$

welche im wesentlichen mit der Ungleichung (2b) des vorigen Paragraphen (S. 254) übereinstimmt und aussagt, daß A der *Doppellimes* der Folge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ und daß diese letztere daher *konvergent* ist. Man hat also in diesem Falle — mit Benützung einer früher[1]) eingeführten Schreibweise:

(19) $$\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \underline{\overline{\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty}}} a_\mu^{(\nu)}.$$

Umgekehrt müssen offenbar *unterer* und *oberer* Doppellimes zusammenfallen, wenn die Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ konvergieren soll, da in diesem Falle die Existenz *zweier* Beziehungen von der Form (8) mit *verschiedenem* l und L (S. 261) ausgeschlossen ist.

---

1) S. § 36, Nr. 3 (S. 218, Gl. (27), (28)).

Es kann aber auch der Fall eintreten:

(20) $$\underline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty.$$

Denn, wenn auch $g_\nu^{(\nu)}$ für jedes einzelne ν einen bestimmten Wert besitzt (abgesehen von dem Falle $g_\nu^{(\nu)} = -\infty$, etwa für $\nu = 0, 1, \cdots, n$)[1]), so kann doch die *niemals abnehmende* Folge der $g_\nu^{(\nu)}$ nach $+\infty$ divergieren. Da *stets:*

(21) $$\underline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} \leqq \overline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} \quad \left(\text{wegen: } g_\nu^{(\nu)} \leqq G_\nu^{(\nu)}\right),$$

so folgt, daß in diesem Falle auch:

(22) $$\overline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty$$

sein muß. Da im übrigen die Beziehung (20) (d. h. $\lim_{\nu\to\infty} g_\nu^{(\nu)} = +\infty$) offenbar erfordert, daß *alle* $a_\mu^{(\nu)}$ für hinlänglich große μ, ν jede noch so große positive Zahl übersteigen, so hat man auch:

(23) $$\lim_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty,$$

sodaß also wiederum die Beziehung (19) in *dem* Sinne besteht, daß alle darin auftretenden Limites die Bedeutung von $+\infty$ haben (wenn auch nicht mehr im Sinne einer wirklichen *Gleichheit*, wie sie ja nur zwischen *endlichen* Zahlen bestehen kann). Die Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ *divergiert* dann *eigentlich*, nämlich nach $+\infty$.

Das entsprechende ergibt sich sodann im Falle $\overline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = -\infty$, welcher stets die Beziehungen $\underline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = -\infty$ und $\lim_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = -\infty$ nach sich zieht.

Die *konvergenten* und *eigentlich divergenten* Doppelfolgen sind somit charakterisiert durch das *Zusammenfallen* der beiden Hauptlimites, also durch die Beziehung:

(24) $$\underline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}.$$

Demgegenüber sollen alle Doppelfolgen $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$, bei denen die beiden Hauptlimites *verschieden* ausfallen, in welchem Falle dann stets

(25) $$\underline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} < \overline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$$

sein muß, als *uneigentlich divergente* bezeichnet werden.[2])

---

1) Es könnte sogar $g_\nu^{(\nu)} = -\infty$ sein für *jedes* ν. Diese Möglichkeit scheidet jedoch in dem vorliegenden Zusammenhange aus, da ja in diesem Falle: $\underline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = -\infty$.

2) Vgl. die Analogie mit den einfach unendlichen Zahlenfolgen § 36, Nr. 4 am Schlusse (S. 220).

5. Um den vorstehenden Ergebnissen noch eine andere, besonders anschauliche Form zu geben, wollen wir die folgende Ausdrucksweise einführen. Wir bezeichnen eine aus der Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ *herausgehobene einfache* Folge

$$\left(a_{m_\nu}^{(n_\nu)}\right) \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

als *wesentliche*[1]) *Teilfolge,* wenn die Indizes m_ν, n_ν *beide* mit ν ins Unendliche wachsen, und speziell als *reguläre* Teilfolgen, wenn dieselben *monoton* zunehmen.[2]) Alsdann ergibt sich:

> *Ist* $\underline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = l$, $\overline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = L$, *so existieren konvergente reguläre Teilfolgen mit den Grenzwerten* l *und* L (s. die Ungleichungen (9), S. 262), *und es gibt keine reguläre Teilfolge, welche einen kleineren Grenzwert als* l *oder einen größeren als* L *hat* (s. Ungleichung (7)).

---

1) *„Wesentlich"*, weil auf Grund der Ergebnisse dieses und des vorigen Paragraphen (vgl. insbesondere S. 254, Fußn. 1) nur die so bezeichnete Art von Teilfolgen für den Konvergenzcharakter der *Doppel*folge wesentlich erscheint.

2) Das einfachste Beispiel einer *regulären* Teilfolge, nämlich $\left(a_\nu^{(\nu)}\right)$, liefert die *Hauptdiagonale* der Doppelfolge (s. das Schema (2), S. 248). Andere einfache Beispiele sind: $\left(a_{\nu+p}^{(\nu)}\right)$, $\left(a_\nu^{(\nu+p)}\right)$, $\left(a_{p\nu}^{(r\nu)}\right)$, $\left(a_{p\nu+q}^{(r\nu)}\right)$, $\left(a_{p\nu}^{(r\nu+q)}\right)$, $\left(a_{p\nu}^{(q\nu^2)}\right)$, $\left(a_{p\nu^2}^{(q\nu)}\right)$ usf. Man kann den Verlauf beliebiger Teilfolgen innerhalb des obigen Doppelreihenschemas sehr übersichtlich geometrisch charakterisieren, wenn man die $a_\mu^{(\nu)}$ als Bezeichnungen der einzelnen Punkte eines ganz nach Art des Schemas (2) angeordneten *quadratischen Punktgitters* ansieht. D. h. man denke sich von einem beliebigen Punkte aus zunächst horizontal nach rechts und vertikal nach unten je eine unbegrenzte Gerade und zu diesen beiden *„Achsen"* weiter nach unten bzw. nach rechts unbegrenzt viele äquidistante Parallelen gezogen. Demjenigen *„Gitterpunkte"*, in welchem sich die ν^{te} Parallele zur horizontalen und die μ^{te} zur vertikalen Achse schneiden, entspricht dann die Bezeichnung $a_\mu^{(\nu)}$ $(\mu \geq 1, \ \nu \geq 1)$, speziell $a_0^{(0)}$ dem Anfangspunkte, $a_\mu^{(0)}$ bzw. $a_0^{(\nu)}$ den Gitterpunkten auf der horizontalen bzw. vertikalen Achse. Verbindet man sodann die irgendeiner Teilfolge entsprechenden Gitterpunkte durch eine möglichst einfach und zweckmäßig ausgewählte Linie, so kann diese als *geometrisches Charakteristikum* der betreffenden *Teilfolge* gelten. Hiernach könnte man dann die Folgen $\left(a_{\nu+p}^{(\nu)}\right)$, $\left(a_\nu^{(\nu+p)}\right)$ als zur Hauptdiagonale *parallele* bezeichnen, da die ihren Gliedern zugeordneten Gitterpunkte offenbar auf einer durch den Punkt $a_p^{(0)}$ bzw. $a_0^{(p)}$ gehenden Parallele zur Hauptdiagonale liegen; analog die Folgen $\left(a_{p\nu+q}^{(r\nu)}\right)$, $\left(a_{r\nu}^{(p\nu+q)}\right)$, deren zugeordnete Gitterpunkte auf einer durch die Punkte $a_q^{(0)}$ und $a_{p+q}^{(r)}$ bzw. $a_0^{(q)}$ und $a_r^{(p+q)}$ bestimmten Geraden liegen, als *geradlinige*, die Folgen $\left(a_{p\nu}^{(q\nu^2)}\right)$, $\left(a_{p\nu^2}^{(q\nu)}\right)$ als *parabolische* usf.

Ist $\underline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = l$, $\overline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty$, *so existieren reguläre Teilfolgen mit den Grenzwerten* l *und* $+\infty$ (Ungleichung (9a), S. 264), *und keine solche mit einem Grenzwerte kleiner als* l (s. Ungleichung (7a)).

Analoges ergibt sich, falls $\underline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = -\infty$, $\overline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = L$ bzw. $+\infty$.

Ferner folgt für den Fall $\underline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$ (endlich oder unendlich):

Ist die Doppelfolge konvergent oder eigentlich divergent, so gilt das entsprechende von jeder wesentlichen, insbesondere von jeder regulären Teilfolge (s. § 40, Ungleichung (2b), (3b)).

Es gilt aber auch umgekehrt folgendes:

Eine Doppelfolge ist konvergent bzw. eigentlich divergent, wenn jede reguläre Teilfolge die entsprechende Eigenschaft besitzt.

Wenn nämlich die regulären Teilfolgen *konvergieren*, so kann nach dem unmittelbar vorangehenden Satze die Doppelfolge *keinesfalls eigentlich divergieren.* Sie kann aber auch nicht *uneigentlich divergieren,* also nicht *zwei verschiedene Hauptlimites* besitzen. Denn wäre dies der Fall, so könnte man nach den zuvor ausgesprochenen Sätzen aus der Doppelfolge zwei *reguläre* Teilfolgen herausheben, sodaß jede derselben einen *anderen* der beiden verschiedenen Hauptlimites zum Grenzwert hat. Aus diesen beiden ließe sich dann aber durch Vereinigung passend ausgewählter Glieder eine wiederum *reguläre* Teilfolge mit jenen beiden verschiedenen Hauptlimites, also eine *uneigentlich divergente* bilden, was der Voraussetzung widerspricht. Die Doppelfolge muß daher tatsächlich *konvergieren.*

In ganz analoger Weise erkennt man die *eigentliche Divergenz* der Doppelfolge, falls alle regulären Teilfolgen *eigentlich divergieren.*

Als Zusatz zu dem zuletzt ausgesprochenen Satze ergibt sich unmittelbar noch folgendes:

Wenn alle regulären Teilfolgen einer Doppelfolge konvergieren, so besitzen sie durchweg denselben Grenzwert.

Wenn eine reguläre Teilfolge verschiedene Hauptlimites oder zwei reguläre Teilfolgen verschiedene Limites besitzen, so ist die Doppelfolge uneigentlich divergent.

§ 42. Die einfachen und iterierten Zeilen- und Kolonnenlimites. — Gleichmäßige Konvergenz, Divergenz, Beschränktheit und Unbeschränktheit der Zeilen und Kolonnen.

1. Im Gegensatz zu den *wesentlichen*, insbesondere den *regulären* Teilfolgen einer Doppelfolge, deren jede einzelne für den Konvergenzcharakter[1]) der *Doppel*folge in gewissem Umfange als maßgebend erkannt wurde, ist das Verhalten solcher Teilfolgen, bei welchen der eine Index unter einer endlichen Schranke bleibt und nur der andere ins Unendliche wächst, deren Glieder also nur einer *endlichen* Anzahl von *Zeilen* oder *Kolonnen* angehören, in dieser Hinsicht ohne jeden bestimmenden Einfluß, da ja das gleiche sogar von der *Gesamtheit* der einer *endlichen* Anzahl von *Zeilen* oder *Kolonnen* angehörenden Glieder gilt (vgl. S. 254, Fußn. 1). Dagegen liegt doch klar auf der Hand, daß die *unbegrenzte Folge* der *Zeilen* bzw. der *Kolonnen*, aus denen die Doppelfolge besteht, mit jenen Eigenschaften, die wir als den Konvergenzcharakter der Doppelfolge bezeichnet haben, in einem gewissen Zusammenhange stehen muß. Bei der Feststellung dieses Zusammenhanges genügt es offenbar, *eine* dieser beiden Kategorien von Teilfolgen, etwa die *Zeilen* ins Auge zu fassen, da alle auf diese letzteren sich beziehenden Ergebnisse *mutatis mutandis* unmittelbar auch auf die *Kolonnen* übertragen werden können.

Die Glieder einer beliebigen *Zeile* der Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$, also:

$$a_0^{(\nu)}\ a_1^{(\nu)} \cdots a_\mu^{(\nu)} \cdots\cdots$$

(wo ν eine beliebig ausgewählte der Zahlen $0, 1, 2, \cdots$ bedeutet) besitzen einen *unteren* und einen *oberen* Limes (die eventuell auch zusammenfallen können), etwa:

$$(1)\qquad \begin{cases} \underline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \underline{a}^{(\nu)} & \text{bzw.} \quad = -\infty \\ \overline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \bar{a}^{(\nu)} & \text{bzw.} \quad = +\infty \end{cases} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

wo $\underline{a}^{(\nu)}$ und $\bar{a}^{(\nu)}$ bestimmte Zahlen vorstellen. Falls jene beiden Limites zusammenfallen, also $\lim_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$ zum mindesten im weiteren Sinne *existiert* und die durch den Index ν charakterisierte Zeile der $a_\mu^{(\nu)}$ $(\mu = 0, 1, 2, \cdots)$

1) Darunter verstehen wir die etwaige Existenz eines *Doppel*limes bzw. das Auftreten *verschiedener Haupt*limites einschließlich derjenigen Unterscheidungen, die wiederum noch aus der Endlichkeit bzw. Unendlichkeit der betreffenden Limites resultieren.

demnach eine *konvergente* oder *eigentlich divergente* Folge bildet, so tritt an die Stelle dieser beiden Beziehungen eine einzige von der Form:

$$(2) \qquad \underline{\lim_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = a^{(\nu)} \quad \text{bzw.} \quad = +\infty \quad \text{oder} \quad -\infty$$

(wo also $a^{(\nu)}$ den gemeinsamen Wert von $\underline{a}^{(\nu)}$ und $\bar{a}^{(\nu)}$ vorstellt).

Bildet man sodann die beiden (eventuell auch in eine einzige zusammenfallenden) Folgen:

$$(3) \qquad \begin{cases} \underline{\lim_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(0)},\ \underline{\lim_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(1)},\ \cdots,\ \underline{\lim_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} \cdots\cdots \\ \overline{\lim_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(0)},\ \overline{\lim_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(1)},\ \cdots,\ \overline{\lim_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} \cdots\cdots, \end{cases}$$

welche durchweg oder wenigstens von einer bestimmten Stelle ab aus *endlichen* Zahlen bestehen können, aber auch unendlich oft oder sogar beständig die Zeichen $+\infty$ oder $-\infty$ enthalten können, so kommt in jedem Falle (vgl. insbesondere § 41, Nr. 3, S. 264) jeder dieser beiden Folgen ein gewisser *unterer* und *oberer Limes* zu, in Zeichen[1]):

$$(4) \quad \underline{\lim_{\nu\to\infty}}\ \underline{\lim_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)},\ \ \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\ \underline{\lim_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} \ \ \text{bzw.}\ \ \underline{\lim_{\nu\to\infty}}\ \overline{\lim_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)},\ \ \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\ \overline{\lim_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}.$$

Die beiden *äußeren* dieser vier (eventuell auch teilweise oder sämtlich zusammenfallenden Limites) wollen wir als den *iterierten unteren* und den *iterierten oberen Zeilenlimes* bezeichnen. Durch wiederholte Anwendung der bekannten Beziehung (s. § 36, Nr. 2, S. 217, Gl. (22)):

$$\underline{\lim_{\nu\to\infty}}\, c_\nu \leqq \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, c_\nu$$

ergibt sich sodann:

$$(5) \qquad \begin{cases} \underline{\lim_{\nu\to\infty}}\ \underline{\lim_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} \leqq \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\ \underline{\lim_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} \leqq \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\ \overline{\lim_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} \\ \underline{\lim_{\nu\to\infty}}\ \underline{\lim_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} \leqq \underline{\lim_{\nu\to\infty}}\ \overline{\lim_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} \leqq \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\ \overline{\lim_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}. \end{cases}$$ [2])

---

1) Man schreibt zuweilen, um die Trennung und Reihenfolge der vorzunehmenden Grenzwertbildungen noch etwas deutlicher zum Ausdruck zu bringen:

$$\underline{\lim_{\nu\to\infty}}\, (\underline{\lim_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}),\ \ \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, (\underline{\lim_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}) \ \text{usf.},$$

doch dürfte wohl auch bei Weglassung der betreffenden Klammern die Möglichkeit eines Mißverständnisses ausgeschlossen erscheinen. Immerhin werden wir uns besonderer Deutlichkeit zuliebe gelegentlich dieser Schreibweise bedienen und den in Klammern befindlichen Limes als den *inneren* bezeichnen.

2) Dagegen kann:

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\ \underline{\lim_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} \lesseqgtr \underline{\lim_{\nu\to\infty}}\ \overline{\lim_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}$$

ausfallen. Setzt man z. B.:

$$a_\mu^{(\nu)} = 2\big(1 + (-1)^\mu\big) + (-1)^\nu,$$

so folgt:

Sind jene beiden *äußeren* Limites einander *gleich*, so müssen auch die beiden *mittleren* mit ihnen *zusammenfallen*. In diesem Falle *existiert* also *im weiteren Sinne* (d. h. als bestimmte Zahl oder als ∞ mit bestimmtem Vorzeichen) der Grenzwert:

$$\lim_{\nu \to \infty} \overline{\lim_{\mu \to \infty}}\, a_\mu^{(\nu)},$$

der dann als *iterierter Zeilenlimes* schlechthin bezeichnet werden möge.[1]

$$\underline{\lim_{\mu \to \infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = (-1)^\nu$$

$$\overline{\lim_{\mu \to \infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = 4 + (-1)^\nu,$$

also:

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}}\, \underline{\lim_{\mu \to \infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = 1$$

$$\underline{\lim_{\nu \to \infty}}\, \overline{\lim_{\mu \to \infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = 3$$

und daher:

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}}\, \underline{\lim_{\mu \to \infty}}\, a_\mu^{(\nu)} < \underline{\lim_{\nu \to \infty}}\, \overline{\lim_{\mu \to \infty}}\, a_\mu^{(\nu)}.$$

Vertauscht man dagegen in dem obigen Beispiele μ und ν, setzt also:

$$a_\mu^{(\nu)} = (-1)^\mu + 2\big(1 + (-1)^\nu\big),$$

so folgt:

$$\underline{\lim_{\mu \to \infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = -1 + 2\big(1 + (-1)^\nu\big)$$

$$\overline{\lim_{\mu \to \infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = 1 + 2\big(1 + (-1)^\nu\big)$$

und sodann:

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}}\, \underline{\lim_{\mu \to \infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = 3$$

$$\underline{\lim_{\nu \to \infty}}\, \overline{\lim_{\mu \to \infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = 1,$$

d. h.:

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}}\, \underline{\lim_{\mu \to \infty}}\, a_\mu^{(\nu)} > \underline{\lim_{\nu \to \infty}}\, \overline{\lim_{\mu \to \infty}}\, a_\mu^{(\nu)}.$$

1) Jeder Grenzwert einer konvergenten Folge *allgemeiner reeller*, insbesondere *irrationaler* Zahlen $A^{(\nu)}$ (vgl. § 28, Nr. 2, S. 169) kann als ein solcher *iterierter Zeilenlimes* aufgefaßt werden. Wird nämlich $A^{(\nu)}$ definiert durch die konvergente Zahlenfolge $[a_\mu^{(\nu)}]$ $(\mu = 0, 1, 2, \cdots)$, so hat man auch: $A^{(\nu)} = \lim_{\mu \to \infty} a_\mu^{(\nu)}$ und daher:

$$\lim_{\nu \to \infty} A^{(\nu)} = \lim_{\nu \to \infty} \lim_{\mu \to \infty} a_\mu^{(\nu)}.$$

Ein einfaches Beispiel für die Existenz des *iterierten Zeilenlimes* bei gleichzeitiger Nichtexistenz *jedes einzelnen Zeilenlimes* liefert die Doppelfolge:

$$\left(a_\mu^{(\nu)}\right) = \left(\frac{\nu + (-1)^\mu}{\nu + 1}\right).$$

Man hat in diesem Falle:

$$\underline{\lim_{\mu \to \infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = \frac{\nu - 1}{\nu + 1}, \quad \overline{\lim_{\mu \to \infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = 1 \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

und sodann:

$$\lim_{\nu \to \infty} \overline{\lim_{\mu \to \infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = 1.$$

2. Wir zeigen zunächst, daß man den *iterierten unteren* bzw. *oberen Zeilenlimes* stets durch *einfache Limites* (also *zwei* nacheinander auszuführende Grenzübergänge durch einen *einzigen*) ersetzen kann. Es gilt nämlich der Satz:

Aus der Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ *lassen sich stets reguläre Teilfolgen* $\left(a_{m_\nu}^{(n_\nu)}\right)$, $\left(a_{r_\nu}^{(s_\nu)}\right)$ *so herausheben, daß:*

(6) $$\lim_{\nu\to\infty} a_{m_\nu}^{(n_\nu)} = \underline{\lim}_{\nu\to\infty}\, \underline{\lim}_{\mu\to\infty}\, a_\mu^{(\nu)}, \quad \lim_{\nu\to\infty} a_{r_\nu}^{(s_\nu)} = \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, \overline{\lim_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}.$$

Beim Beweise haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die betreffenden Limites *endlich* oder *unendlich* ausfallen.

Fall I. Es sei zunächst:

(7) $$\underline{\lim}_{\nu\to\infty}\, \underline{\lim}_{\mu\to\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = \underline{a} \quad (\text{wo } \underline{a} \text{ eine bestimmte Zahl}).$$

Diese Voraussetzung schließt zunächst keineswegs aus, daß in der Folge:

(8) $$\underline{\lim}_{\mu\to\infty}\, a_\mu^{(0)},\ \underline{\lim}_{\mu\to\infty}\, a_\mu^{(1)},\ \cdots,\ \underline{\lim}_{\mu\to\infty}\, a_\mu^{(\nu)},\ \cdots\cdots$$

das Zeichen $-\infty$ in *endlicher* Anzahl, das Zeichen $+\infty$ sogar *unendlich oft* vorkommt: nichtsdestoweniger muß sich auf Grund der Definition des *unteren* Limes einer einfachen Folge (s. § 36, Gl. (20), S. 217) aus der Folge (8) eine Folge *endlicher* Zahlen, etwa:

(9) $$\underline{\lim}_{\mu\to\infty}\, a_\mu^{(n_0)} = \underline{a}^{(n_0)},\ \underline{\lim}_{\mu\to\infty}\, a_\mu^{(n_1)} = \underline{a}^{(n_1)},\ \cdots,\ \underline{\lim}_{\mu\to\infty}\, a_\mu^{(n_\nu)} = \underline{a}^{(n_\nu)},\ \cdots\cdots,$$

mit dem *Grenzwerte* $\underline{a}$ herausheben lassen, sodaß also:

(10) $$\lim_{\nu\to\infty} \underline{a}^{(n_\nu)} = \underline{a},$$

also infolge der Voraussetzung (7):

(11) $$\lim_{\nu\to\infty} \underline{a}^{(n_\nu)} = \underline{\lim}_{\nu\to\infty}\, \underline{\lim}_{\mu\to\infty}\, a_\mu^{(\nu)}.$$

Da andererseits nach (9) $\underline{a}^{(n_\nu)}$ den *unteren Limes* der Folge $\left(a_\mu^{(n_\nu)}\right)$ (für: $\mu = 0, 1, 2, \cdots$) vorstellt, so muß es zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem einzelnen n_ν unter den Zahlen $a_\mu^{(\nu)}$ *unendlich viele* geben, sodaß:

$$\underline{a}^{(n_\nu)} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(n_\nu)} \leqq \underline{a}^{(n_\nu)} + \varepsilon.$$

Wird jetzt eine Folge positiv abnehmender Zahlen ε_ν mit dem Grenz-

werte $\lim\limits_{\nu\to\infty} \varepsilon_\nu = 0$ angenommen, so existiert also eine *erste* natürliche Zahl m_0, derart, daß:

$$\underline{a}^{(n_0)} - \varepsilon_0 \leqq a_{m_0}^{(n_0)} \leqq \underline{a}^{(n_0)} + \varepsilon_0;$$

sodann eine *erste* Zahl $m_1 > m_0$, sodaß:

$$\underline{a}^{(n_1)} - \varepsilon_1 \leqq a_{m_1}^{(n_1)} \leqq \underline{a}^{(n_1)} + \varepsilon_1.$$

So fortfahrend erhält man eine Folge *wachsender* Zahlen m_ν $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ und mit diesen eine *reguläre Teilfolge* $\left(a_{m_\nu}^{(n_\nu)}\right)$ der Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$, von der Beschaffenheit, daß:

$$\underline{a}^{(n_\nu)} - \varepsilon_\nu \leqq a_{m_\nu}^{(n_\nu)} \leqq \underline{a}^{(n_\nu)} + \varepsilon_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots), \tag{12}$$

und man findet daher, da $\lim\limits_{\nu\to\infty} \underline{a}^{(n_\nu)}$ nach Gl. (10) eine bestimmte Zahl vorstellt, mit Berücksichtigung von Gl. (11):

$$\underline{\lim}_{\nu\to\infty}\ \underline{\lim}_{\mu\to\infty}\ a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} a_{m_\nu}^{(n_\nu)}. \tag{13}$$

In analoger Weise ergibt sich eine Beziehung von der Form:

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\ \overline{\lim_{\mu\to\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} a_{r_\nu}^{(s_\nu)}, \tag{14}$$

zunächst wieder unter der Voraussetzung, daß dieser iterierte Limes *endlich* ausfällt — und zwar am einfachsten, wenn man davon ausgeht, daß $\left(-\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\ \overline{\lim\limits_{\mu\to\infty}}\ a_\mu^{(\nu)}\right)$ den entsprechenden *unteren* Limes für die Doppelfolge $\left(-a_\mu^{(\nu)}\right)$ vorstellt.[1])

Fall II. Es sei jetzt:

$$\underline{\lim}_{\nu\to\infty}\ \underline{\lim}_{\mu\to\infty}\ a_\mu^{(\nu)} = -\infty. \tag{15}$$

Auf Grund dieser Voraussetzung muß sich nach Annahme einer Folge positiv wachsender Zahlen A_ν mit dem Grenzwert $\lim\limits_{\nu\to\infty} A_\nu = +\infty$ aus der

---

1) In dem besonderen Falle, daß alle Zeilen konvergieren und ihre Grenzwerte wieder eine konvergente Folge liefern, ergibt sich also eine Beziehung von der Form:

$$\lim_{\nu\to\infty} \lim_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} a_{m_\nu}^{(n_\nu)},$$

d. h. man kann einen solchen *iterierten Zeilenlimes* durch den *einfachen Limes* einer *regulären Teilfolge* ersetzen. Eine Anwendung dieses Prinzips findet sich schon in § 28, Nr. 2 (S. 169, Gl. (9)).

Folge (8) eine unbegrenzte Folge von Gliedern[1]) $\underline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(n_\nu)}$ so herausheben lassen, daß:

(16) $$\underline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(n_\nu)} < -A_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots).$$

Aus der Bedeutung von $\underline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(n_\nu)'}$ folgt dann weiter, daß unter den Zahlen $a_\mu^{(n_\nu)}$ zu jedem einzelnen ν *unendlich viele* vorhanden sein müssen, sodaß:

(17) $$a_\mu^{(n_\nu)} < -A_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots).$$

Man kann daher ganz analog wie im Falle I zu $n_0, n_1, n_2, \cdots$ eine *steigende* Folge natürlicher Zahlen $m_0, m_1, m_2, \cdots$ so auswählen, daß:

(18) $$a_{m_\nu}^{(n_\nu)} < -A_\nu \quad (\text{wo also: } m_\nu > m_{\nu-1},\ n_\nu > n_{\nu-1}),$$

und somit:

(19) $$\lim_{\nu\to\infty} a_{m_\nu}^{(n_\nu)} = -\infty,$$

d. h. wieder, wie behauptet:

(20) $$\underline{\lim}_{\nu\to\infty}\ \underline{\lim}_{\mu\to\nu} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} a_{m_\nu}^{(n_\nu)}.$$

Entsprechend ergibt sich:

(21) $$\overline{\lim}_{\nu\to\infty}\ \overline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} a_{r_\nu}^{(s_\nu)}, \quad \text{falls: } \overline{\lim}_{\nu\to\infty}\ \overline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty.$$

Sollte schließlich eine der Voraussetzungen bestehen:

(22) $$\underline{\lim}_{\nu\to\infty}\ \underline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty \quad \text{bzw.} \quad \overline{\lim}_{\nu\to\infty}\ \overline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = -\infty,$$

so folgt aus Gl. (5), daß auch:

(23) $$\overline{\lim}_{\nu\to\infty}\ \overline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty \quad \text{bzw.} \quad \underline{\lim}_{\nu\to\infty}\ \underline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = -\infty,$$

sodaß die Gültigkeit der in Frage stehenden Beziehungen aus den zuvor abgeleiteten (21) bzw. (20) unmittelbar hervorgeht.

3. Es erscheint für den weiteren Fortgang dieser Untersuchungen erforderlich, in bezug auf die sukzessive Annäherung der Zahlen $a_\mu^{(\nu)}$ an die betreffenden Zeilenlimites $\overline{\underline{\lim}}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$ gewisse Unterscheidungen zu treffen und diese durch geeignete Bezeichnungen zu charakterisieren.

---

1) Die Glieder $\underline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(n_\nu)}$ dieser Folge können durchweg *endlich* oder auch teilweise bzw. sämtlich $= -\infty$ sein.

Wir fassen zunächst den einfachsten Fall ins Auge, daß jede Zeile zum mindesten für $\nu \geqq n$ *konvergiert*. Ist dann etwa:

(24) $$\lim_{\mu \to \infty} a_\mu^{(\nu)} = a^{(\nu)} \quad (\nu = n, n+1, n+2, \cdots),$$

so besagt diese Voraussetzung lediglich folgendes: Für *jedes einzelne* $\nu \geqq n$ existiert *erstens* eine bestimmte Zahl $a^{(\nu)}$ und *zweitens* zu jedem (beliebig kleinen) $\varepsilon > 0$ eine *kleinste* Zahl m_ν, sodaß:

(25) $$|a_\mu^{(\nu)} - a^{(\nu)}| \leqq \varepsilon, \quad \text{wenn: } \mu \geqq m_\nu \quad (\nu = n, n+1, n+2, \cdots).$$

Dabei werden die Zahlen m_ν außer mit ε im allgemeinen auch mit ν veränderlich sein, und es erscheint insbesondere nicht ausgeschlossen, daß sie, sobald ε einen gewissen Kleinheitsgrad erreicht hat, zum Teil oder sämtlich zugleich mit ν *über alle Grenzen wachsen*. Das letztere kann auch bezüglich der $|a^{(\nu)}|$ der Fall sein. Wenn einer dieser beiden Fälle eintritt oder auch beide zugleich, so sagen wir, die *Zeilen* seien *ungleichmäßig konvergent*.

Wenn dagegen bei jeder Wahl von ε für die Zahlen m_ν ein *bestimmtes endliches Maximum* m vorhanden ist und die $|a^{(\nu)}|$ unter einer endlichen Schranke A bleiben, so läßt sich die Bedingung (25) durch die folgende ersetzen:

(26) $$|a_\mu^{(\nu)} - a^{(\nu)}| \leqq \varepsilon, \quad \text{wenn: } \mu \geqq m \quad (\nu = n, n+1, n+2, \cdots),$$

wobei jetzt m eine nur noch von ε abhängende, für alle $\nu \geqq n$ *unveränderliche* Zahl bedeutet und $|a^{(\nu)}| < A$ bleibt. In diesem Falle sollen die Zeilen als *gleichmäßig konvergent* für $\nu \geqq n$ bezeichnet werden.

Analoge Unterscheidungen treffen wir für den Fall, daß alle Zeilen zum mindesten für $\nu \geqq n$ *eigentlich divergent* sind, daß also:

(27) $$\lim_{\mu \to \infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty \quad \text{bzw.} \quad = -\infty \quad (\nu = n, n+1, n+2, \cdots).$$

Dies besagt, daß zu jedem (noch so großen) $A > 0$ für *jedes einzelne* ν eine kleinste Zahl m_ν existiert, sodaß:

(28) $$a_\mu^{(\nu)} > A \quad \text{bzw.} < -A, \quad \text{wenn: } \mu \geqq m_\nu \quad (\nu = n, n+1, n+2, \cdots).$$

Haben alsdann bei jeder Wahl von A die m_ν ein *bestimmtes endliches Maximum* m, sodaß also die Bedingung (28) durch die folgende ersetzt werden kann:

(29) $$a_\mu^{(\nu)} > A \quad \text{bzw.} < -A, \quad \text{wenn: } \mu \geqq m \quad (\nu = n, n+1, n+2, \cdots),$$

so sollen die Zeilen *gleichmäßig divergent* für $\nu \geqq n$ heißen; *ungleichmäßig divergent* dagegen, wenn bei irgendeiner Wahl von A ein solches Maxi-

mum *nicht* vorhanden ist, sodaß also die m_ν gleichzeitig mit ν zum Teil oder sämtlich *ins Unendliche wachsen.*

Beispiele. 1) Die Zeilen der Folge $\left(\frac{\mu+\nu}{\mu\nu}\right)_1^1$ sind *gleichmäßig konvergent.* Man hat nämlich:

$$a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}, \quad \lim_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{\nu},$$

also:

$$a_\mu^{(\nu)} - \lim_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{\mu}.$$

Wird also $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, darauf m so fixiert, daß $\frac{1}{m} \leqq \varepsilon$, so folgt:

$$\left| a_\mu^{(\nu)} - \lim_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} \right| = \frac{1}{\mu} \leqq \varepsilon \quad \text{für } \mu \geqq m \text{ und } \nu = 1, 2, 3, \cdots.$$

2) Die Zeilen der Folge $(\mu+\nu)_0^0$ sind *gleichmäßig divergent.* Denn man hat:

$$a_\mu^{(\nu)} = \mu + \nu, \quad \lim_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty, \quad a_\mu^{(\nu)} \geqq \mu \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, 2, \cdots.$$

Wird also $A > 0$ beliebig groß vorgeschrieben, sodann $m > A$ angenommen, so hat man:

$$a_\mu^{(\nu)} \geqq m > A \quad \text{für} \quad \mu \geqq m \text{ und } \nu = 0, 1, 2, \cdots.$$

3) Die Zeilen der Folge $\left(\frac{(\mu-\nu)^2}{1+(\mu-\nu)^2}\right)_0^0$ sind *ungleichmäßig konvergent.* Aus:

$$a_\mu^{(\nu)} = \frac{(\mu-\nu)^2}{1+(\mu-\nu)^2}, \quad \lim_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = 1$$

folgt nämlich:

$$\left| a_\mu^{(\nu)} - \lim_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} \right| = 1 - \frac{(\mu-\nu)^2}{1+(\mu-\nu)^2} = \frac{1}{1+(\mu-\nu)^2}.$$

Versteht man unter n eine *beliebig große* natürliche Zahl und setzt sodann $\nu = n$, d. h. faßt man eine Zeile von *beliebig hohem Stellenzeiger* ins Auge, so wird allemal:

$$\left| a_n^{(n)} - \lim_{\mu\to\infty} a_\mu^{(n)} \right| = 1 \quad (\text{also } \textit{nicht} \text{ beliebig klein}).$$

Es ist also *nicht* möglich, dem absoluten Betrage der Differenz $a_\mu^{(\nu)} - \lim\limits_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$ lediglich durch Fixierung einer passenden unteren Schranke $\mu = m$ für *alle* ν einen gewissen Kleinheitsgrad zu sichern. Im übrigen tritt das Wesen der im vorliegenden Falle vorhandenen *ungleichmäßigen Konvergenz* noch an-

schaulicher hervor, wenn man sich eine Anzahl Glieder der gegebenen Doppelfolge nach Zeilen und Kolonnen geordnet anschreibt:

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & \frac{1^2}{1+1^2} & \frac{2^2}{1+2^2} & \frac{3^2}{1+3^2} & \cdots & \frac{\mu^2}{1+\mu^2} & \cdots\cdots \\
\frac{1^2}{1+1^2} & 0 & \frac{1^2}{1+1^2} & \frac{2^2}{1+2^2} & \cdots & \frac{(\mu-1)^2}{1+(\mu-1)^2} & \cdots\cdots \\
\frac{2^2}{1+2^2} & \frac{1^2}{1+1^2} & 0 & \frac{1^2}{1+1^2} & \cdots & \frac{(\mu-2)^2}{1+(\mu-2)^2} & \cdots\cdots \\
\frac{3^2}{1+3^2} & \frac{2^2}{1+2^2} & \frac{1^2}{1+1^2} & 0 & \cdots & \frac{(\mu-3)^2}{1+(\mu-3)^2} & \cdots\cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Es zeigt sich, daß die Glieder jeder einzelnen Zeile schließlich *beständig zunehmend* der Grenze 1 zustreben. Aber dieses *Zunehmen* der Glieder beginnt jedesmal erst *rechts* von dem Gliede der *Hauptdiagonale*, welches in *jeder* Zeile 0 heißt: die sukzessive Annäherung der Glieder an den Grenzwert 1 wird also mit jeder Zeile *um eine Stelle weiter hinausgeschoben.*

4) Auch die Zeilen der Folge $\left(\frac{\mu\nu}{\mu^2+\nu^2}\right)_1^1$ sind *ungleichmäßig konvergent.* Man hat in diesem Falle:

$$a_\mu^{(\nu)} = \frac{\mu\nu}{\mu^2+\nu^2} = \frac{1}{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\nu}{\mu}}, \quad \lim_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, 3, \cdots,$$

also:

$$\left| a_\mu^{(\nu)} - \lim_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} \right| = \frac{\mu\nu}{\mu^2+\nu^2},$$

und daher für jedes *noch so große n*:

$$\left| a_n^{(n)} - \lim_{\mu\to\infty} a_\mu^{(n)} \right| = \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

Die Glieder jeder einzelnen Zeile konvergieren hier schließlich *beständig abnehmend* gegen den Grenzwert 0. Aber das *Abnehmen* der Glieder beginnt wieder jedesmal erst *rechts* von der *Hauptdiagonale*, deren Glieder $a_\nu^{(\nu)}$ durchweg $= \frac{1}{2}$ sind. Bedeutet ferner p eine beliebige natürliche Zahl, so findet man:

$$a_{p\nu}^{(\nu)} = \frac{p}{1+p^2},$$

d. h. das Glied $\frac{p}{1+p^2}$, welches für $\nu = 1$, d. h. in der *ersten* Zeile, für $\mu = p$ zum Vorschein kommt, also an der p^{ten} *Stelle* steht, resultiert in der n^{ten} Zeile erst für $\mu = pn$, steht also dort erst an der pn^{ten} Stelle: es findet also mit jeder neuen Zeile, abgesehen von der (auch schon im

vorigen Beispiel hervorgetretenen) *Hinausschiebung* der Tendenz, dem Grenzwerte zuzustreben, eine beständige *Verlangsamung* des Annäherungsprozesses (hier der Gliederabnahme) statt.

5) Als *ungleichmäßig konvergent* haben ferner die Zeilen der Folge $\left(\frac{1}{\mu}+\nu\right)_1^1$ zu gelten. Zwar hat man hier:

$$a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{\mu} + \nu, \quad \lim_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \nu,$$

also:

$$a_\mu^{(\nu)} - \lim_{\mu\to\nu} a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{\mu},$$

und daher genau so wie bei dem Beispiele 1):

$$\left|a_\mu^{(\nu)} - \lim_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}\right| \leqq \frac{1}{m} \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad \mu \geqq m \geqq \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \nu = 1, 2, 3, \cdots.$$

Dagegen ist hier die Bedingung *nicht* erfüllt, daß die $|a^{(\nu)}|$ (wo $a^{(\nu)} = \lim_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$) unter einer endlichen Schranke bleiben, denn man hat:

$$\lim_{\nu\to\infty} a^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} \nu = +\infty.$$

6) Die Zeilen der Folge $((\mu-\nu)^2)_0^0$ sind *ungleichmäßig divergent.* Es ist nämlich:

$$a_\mu^{(\nu)} = (\mu-\nu)^2, \quad \lim_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, 2, \cdots.$$

Nichtsdestoweniger läßt sich, wenn $G > 0$ beliebig vorgeschrieben wird, *kein* m so fixieren, daß:

$$a_\mu^{(\nu)} > G \quad \text{für} \quad \mu \geqq m \text{ und } \nu = 0, 1, 2, \cdots.$$

Denn, *wie groß* auch n angenommen werden möge, so ergibt sich stets:

$$a_n^{(n)} = 0,$$

mit anderen Worten, die *Hauptdiagonale* besteht wiederum aus lauter *Nullen* und das *Zunehmen* der Glieder beginnt allemal erst *rechts* davon.[1])

4. Eine analoge Verallgemeinerung, wie wir sie früher für den *Limes*begriff durch Einführung des *unteren* und *oberen Limes* vorgenommen haben, erweist sich auch für die Begriffe der *gleichmäßigen* bzw. *ungleichmäßigen* Konvergenz und Divergenz als durchführbar und zweckmäßig.

---

1) Da die angeführten Beispiele außer 5) in bezug auf die beiden Indizes μ, ν völlig symmetrisch gebaut sind, so können sie auch zur Erläuterung der fraglichen Konvergenz- und Divergenzeigenschaften für die *Kolonnen* dienen. An Stelle des Beispiels 5) hätte man für den gleichen Zweck lediglich $\left(\mu+\frac{1}{\nu}\right)_1^1$ einzuführen.

Wir wollen zunächst annehmen, daß die (unteren und oberen) *Limites aller Zeilen*, zum mindesten nach Ausschluß einer *endlichen* Anzahl, numerisch *unter einer endlichen Schranke* bleiben (eine Annahme, die offenbar diejenige der *Zeilenkonvergenz* gegen *endlich bleibende* Limites als speziellen Fall enthält), etwa:

$$(30)\quad \underline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \underline{a}^{(\nu)},\quad \overline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \bar{a}^{(\nu)},\quad \text{wo:}\ \left.\begin{array}{l}|\underline{a}^{(\nu)}|\\ |\bar{a}^{(\nu)}|\end{array}\right\} < A\ \text{ für: } \nu \geqq n.$$

Alsdann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ und für jedes einzelne $\nu \geqq n$ eine *kleinste* Zahl m_ν, sodaß:

$$(31)\qquad \underline{a}^{(\nu)} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{a}^{(\nu)} + \varepsilon \quad \text{für: } \mu \geqq m_\nu,\ \nu \geqq n.$$

Bedeutet sodann:

$\underline{\alpha}^{(\nu)}$ die *untere Grenze* der Zahlenfolge $\underline{a}^{(\nu)}, \underline{a}^{(\nu+1)}, \underline{a}^{(\nu+2)}, \dots,$
$\bar{\alpha}^{(\nu)}$ „ *obere Grenze* „ „ $\bar{a}^{(\nu)}, \bar{a}^{(\nu+1)}, \bar{a}^{(\nu+2)}, \dots,$

sodaß also insbesondere:

$$(32)\quad \underline{\alpha}^{(\nu)} \leqq \underline{a}^{(\nu)},\ \bar{a}^{(\nu)} \leqq \bar{\alpha}^{(\nu)}\ \ (\text{übrigens auch: } \left.\begin{array}{l}|\underline{\alpha}^{(\nu)}|\\ |\bar{\alpha}^{(\nu)}|\end{array}\right\} \leqq A\ \text{ für: } \nu \geqq n),$$

so besteht gleichzeitig mit Ungl. (31) umsomehr die folgende:

$$(33)\qquad \underline{\alpha}^{(\nu)} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{\alpha}^{(\nu)} + \varepsilon \quad \text{für: } \mu \geqq m_\nu,\ \nu \geqq n.$$

Haben nun in bezug auf diese letzten Ungleichungen wiederum die Zahlen m_ν für jedes einzelne $\varepsilon > 0$ und für *alle* $\nu \geqq n$ ein bestimmtes (allenfalls nur noch von ε abhängiges) *Maximum* m, sodaß also die Bedingung (33) durch die folgende ersetzt werden kann:

$$(34)\qquad \underline{\alpha}^{(\nu)} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{\alpha}^{(\nu)} + \varepsilon \quad \text{für: } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n,$$

so sollen die *Zeilen* der Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ *gleichmäßig beschränkt* für $\nu \geqq n$ heißen, ferner *einseitig gleichmäßig beschränkt* und zwar *nach unten* bzw. *nach oben*, wenn *nur* die erste bzw. zweite der beiden Beziehungen:

$$(34\text{a})\quad \underline{\alpha}^{(\nu)} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)},\quad a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{\alpha}^{(\nu)} + \varepsilon \quad \text{für: } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n$$

besteht.[1])

Da die Bedingung (34) sicher erfüllt ist, wenn schon die Bedingung (31) für $\mu \geqq m$ gilt, und da diese letztere im Falle $\underline{a}^{(\nu)} = \bar{a}^{(\nu)}$ mit derjenigen für die *gleichmäßige Konvergenz* der bei $\nu = n$ beginnenden *Zeilen* zusammenfällt (vgl. (26), S. 275), so erscheint diese letztere Eigenschaft als ein spezieller Fall der *gleichmäßigen Beschränktheit.*

---

1) Im ersten Falle brauchen natürlich nur die $|\underline{a}^{(\nu)}|$, im zweiten nur die $|\bar{a}^{(\nu)}|$ unter einer endlichen Schranke zu bleiben.

Bleiben die $|\underline{a}^{(\nu)}| = |\underline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}|$, $|\bar{a}^{(\nu)}| = |\overline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}|$, wie *groß* man auch n annehmen möge, für $\nu \geqq n$ *nicht* unter einer endlichen Schranke, so wollen wir in dem vorliegenden Zusammenhange nur die beiden Fälle näher ins Auge fassen:

$$(35) \qquad \lim_{\nu\to\infty} \overline{\lim_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = +\infty \quad \textit{oder} \quad = -\infty.$$

Auf Grund dieser Voraussetzungen existiert dann zunächst zu jedem (beliebig *großen*) $A > 0$ eine *kleinste* natürliche Zahl n, sodaß:

$$(36) \quad \begin{cases} \underline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} > A, & \text{also auch: } \overline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} > A \quad \text{für: } \nu \geqq n, \\ \textit{oder:}\ \overline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} < -A, & \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \underline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} < -A \quad \text{für: } \nu \geqq n. \end{cases}$$ [1]

Daraus folgt wiederum nur soviel, daß für jedes einzelne ν eine *kleinste* Zahl m_ν existiert, derart, daß:

$$(37) \qquad a_\mu^{(\nu)} > A \quad \text{bzw.} \quad a_\mu^{(\nu)} < -A \quad \text{für: } \mu \geqq m_\nu,\ \nu \geqq n.$$

Ist dann bei jeder Wahl von A für die Zahlen m_ν ein bestimmtes *Maximum* m vorhanden, sodaß also die obige Bedingung durch die folgende ersetzt werden kann:

$$(38) \qquad a_\mu^{(\nu)} > A \quad \text{bzw.} \quad a_\mu^{(\nu)} < -A \quad \text{für: } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n,$$

so sollen die *Zeilen* der Doppelfolge (und, wie die Form der Bedingung (38) zeigt, dann *eo ipso* auch die *Kolonnen*) als *gleichmäßig unbeschränkt*[2]) be-

---

1) Dabei wird im allgemeinen n mit A sich ändern (nämlich mit zunehmendem A gleichfalls zunehmen). Dies wäre nur dann nicht der Fall, wenn von einer bestimmten Zeile ab, etwa für $\nu \geqq n'$ durchweg:

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = +\infty \quad \text{oder} \quad = -\infty$$

ausfiele. Alsdann genügt offenbar die Annahme $n = n'$ für jedes beliebige A.

2) Die Bezeichnung, deren wesentlicher Bestandteil in dem Beiworte *„gleichmäßig"* besteht, bezieht sich (wie alle ähnlichen, in Nr. 3, 4 dieses Paragraphen eingeführten) nur auf die in Frage kommenden Zeilen als *Gesamtheit*. Dabei kann immerhin jede *einzelne* Zeile *begrenzt* (d. h. mit endlichen Hauptlimites versehen), ja sogar *konvergent* sein (vgl. weiter unten im Text das Beispiel 9)). Ferner sei darauf hingewiesen, daß die zur Definition der *gleichmäßigen Unbeschränktheit* dienende Bedingung (38) mit derjenigen für die Existenz der Beziehung $\lim_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty$ bzw. $= -\infty$ zusammenfällt (s. § 40, S. 254, Ungl. (3 a)). Jene neue *Bezeichnung* der durch die Bedingung (38) charakterisierten Eigenschaft der $a_\mu^{(\nu)}$ rechtfertigt sich indessen durch den veränderten Gesichtspunkt, unter welchem die fragliche Bedingung sich hier eingestellt hat, und erweist sich schließ-

zeichnet werden. Die Vergleichung der Bedingung (38) mit der für die *gleichmäßige Divergenz* geltenden (S. 275, Ungl. (29)) zeigt wiederum, daß diese letztere Eigenschaft als spezieller Fall der soeben definierten erscheint.

Fortsetzung der Beispiele.

7) Die Zeilen der Folge $\left((-1)^{\mu+\nu}\frac{\mu+\nu}{\mu\nu}\right)_1^1$ sind *gleichmäßig beschränkt*. Aus:

$$a_\mu^{(\nu)} = (-1)^{\mu+\nu}\frac{\mu+\nu}{\mu\nu} = (-1)^{\mu+\nu}\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}\right)$$

folgt zunächst:

$$\underline{a}^{(\nu)} = \underline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = -\frac{1}{\nu}, \quad \bar{a}^{(\nu)} = \overline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\frac{1}{\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots),$$

also auch:

$$\underline{\alpha}^{(\nu)} = -\frac{1}{\nu}, \quad \bar{\alpha}^{(\nu)} = +\frac{1}{\nu}.$$

Da andererseits:

$$-\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\nu} \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots),$$

so folgt:

$$\underline{\alpha}^{(\nu)} - \frac{1}{\mu} \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{\alpha}^{(\nu)} + \frac{1}{\mu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots),$$

und daher (in Übereinstimmung mit der Definition (31)):

$$\underline{\alpha}^{(\nu)} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{\alpha}^{(\nu)} + \varepsilon \quad \text{für: } \mu \geqq m \geqq \frac{1}{\varepsilon}, \quad \nu = 1, 2, 3, \cdots$$

(wobei überdies: $|\underline{a}^{(\nu)}| \leqq 1$, $|\bar{a}^{(\nu)}| \leqq 1$).

8) Die Zeilen der Folge $\left((-1)^{\mu+\nu}\frac{2+(\mu-\nu)^2}{1+(\mu-\nu)^2}\right)_0^0$ sind *ungleichmäßig beschränkt*. Aus:

$$a_\mu^{(\nu)} = (-1)^{\mu+\nu}\frac{2+(\mu-\nu)^2}{1+(\mu-\nu)^2} = (-1)^{\mu+\nu}\left(1+\frac{1}{1+(\mu-\nu)^2}\right)$$

folgt:

$$\underline{a}^{(\nu)} = \underline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = -1, \quad \bar{a}^{(\nu)} = \overline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = +1,$$

also auch:

$$\underline{\alpha}^{(\nu)} = -1, \quad \bar{\alpha}^{(\nu)} = +1.$$

Andererseits hat man für jedes noch so große n:

$$a_n^{(n)} = 2, \quad a_{n\pm1}^{(n)} = -\frac{3}{2},$$

d. h. in jeder Zeile mit beliebig hohem Stellenzeiger n liegen für $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$

---

lich als zweckmäßig, um gewisse Analogien zwischen den *konvergenten* und den *eigentlich divergenten* Doppelfolgen angemessen zum Ausdruck zu bringen (vgl. die Sätze (IIb) und (III) des folgenden Paragraphen, S. 290, 292).

das n^{te}, $(n+1)^{\text{te}}$ und $(n+2)^{\text{te}}$ Glied stets noch *außerhalb* des Intervalls $(\underline{\alpha}^{(n)} - \varepsilon, \overline{\alpha}^{(n)} + \varepsilon)$, d. h. $(-1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$.

9) Die Zeilen der Folge $\left(\frac{1}{\mu} + \nu\right)_1^1$, welche oben (s. Beispiel 5)) als *ungleichmäßig konvergent* erkannt wurden, sind andererseits *gleichmäßig unbeschränkt*. Man hat nämlich:

$$a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{\mu} + \nu > \nu.$$

Wird also $A > 0$ beliebig groß und sodann $n \geqq A$ angenommen, so folgt:

$$a_\mu^{(\nu)} > A \quad \text{für:}\ \mu \geqq 1,\ \nu \geqq n.$$

10) *Gleichmäßig unbeschränkt* sind auch die Zeilen der Folge $\left(\nu + (1 + (-1)^\mu)\mu\right)_0^0$. Man hat in diesem Falle:

$$a_\mu^{(\nu)} = \nu, \text{ wenn } \mu \textit{ ungerade}, \quad a_\mu^{(\nu)} = \nu + 2\mu, \text{ wenn } \mu \textit{ gerade},$$

mithin:

$$\underline{\lim}_{\mu \to \infty} a_\mu^{(\nu)} = \nu, \quad \overline{\lim}_{\mu \to \infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty.$$

Wird jetzt $A > 0$ beliebig groß und sodann $n > A$ angenommen, so folgt also:

$$a_\mu^{(\nu)} > A \quad \text{für:}\ \nu \geqq n,\ \mu \geqq 0.$$

11) Es werde gesetzt:

$$a_\mu^{(\nu)} \begin{cases} = -\mu, & \text{wenn: } \mu < \nu \\ = \ \ 0, & \text{wenn: } \mu = \nu \\ = \ \ \nu, & \text{wenn: } \mu > \nu \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, 3, \cdots \\ \nu = 1, 2, 3, \cdots \end{pmatrix}.$$ [1]

1) Will man $a_\mu^{(\nu)}$ durch einen einzigen arithmetischen Ausdruck darstellen, so braucht man nur zu setzen:

$$a_\mu^{(\nu)} = \lim_{p \to \infty} \frac{\mu^{p-1} - \nu^{p-1}}{\mu^p + \nu^p} \cdot \mu\nu$$

und zu beachten, daß man diesem Ausdrucke die beiden Formen geben kann:

$$\lim_{p \to \infty} \frac{\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{p-1} - 1}{\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^p + 1} \cdot \mu$$

und

$$\lim_{p \to \infty} \frac{1 - \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{p-1}}{1 - \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^p} \cdot \nu,$$

deren erste für den Fall $\mu < \nu$, die zweite für $\mu > \nu$ unmittelbar das erforderliche leistet, während für $\mu = \nu$ die ursprüngliche Form des Ausdruckes ausreicht.

Da ja in *jeder* Zeile von beliebig hohem Range ν schließlich immer $\mu > \nu$ wird, so hat man:

$$\underline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \nu,$$

d. h. die Zeilen sind sämtlich *konvergent*, aber *ungleichmäßig*, da ja der Grenzwert ν ins Unendliche wächst, übrigens aber auch schon darum, weil (für jedes noch so große n) $a_n^{(n)} = 0$, $a_{n-\lambda}^{(n)} = -(n-\lambda)$ (für $\lambda = 1, 2, \cdots, n-1$). Aus diesem letzteren Grunde sind dann die Zeilen auch *nicht einmal gleichmäßig unbeschränkt.*[1])

§ 43. Beziehungen zwischen den Doppellimites und den iterierten Zeilen- bzw. Kolonnenlimites.

1. Mit Hilfe der in Nr. 3 und 4 des vorigen Paragraphen eingeführten Unterscheidungen lassen sich die Beziehungen zwischen den in § 40, 41 betrachteten *Doppellimites* und den *iterierten Limites* der Zeilen oder Kolonnen in sehr allgemeiner Weise feststellen.

Als Grundlage ergibt sich zunächst der folgende Satz:

(I) *Der iterierte untere (sc. Zeilen- oder Kolonnen-) Limes ist niemals kleiner, der iterierte obere Limes niemals größer, als der entsprechende Doppellimes, d. h. man hat:*

$$(1)\qquad \underline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} \left\{ \begin{matrix} \leqq \underline{\lim}_{\nu\to\infty}\ \underline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} \leqq \overline{\lim}_{\nu\to\infty}\ \overline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} \\ \leqq \underline{\lim}_{\mu\to\infty}\ \underline{\lim}_{\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} \leqq \overline{\lim}_{\mu\to\infty}\ \overline{\lim}_{\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} \end{matrix} \right\} \leqq \overline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}.$$

Beweis. Nach dem Satze von Nr. 2 des vorigen Paragraphen (S. 272) kann man jeden der in Frage kommenden *iterierten* Limites durch den Limes einer konvergenten *regulären Teilfolge* ersetzen. Andererseits gibt es aber nach § 41, Nr. 5 (S. 267) *keine* reguläre Teilfolge, deren Grenzwert kleiner als $\underline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$ oder größer als $\overline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$ ausfiele. Hieraus ergibt sich aber ohne weiteres die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes. —

Fallen die beiden *äußersten* Glieder der Ungleichungen (1) zusammen, so gilt das gleiche für *alle* Glieder, und man gewinnt daher mit Benützung der in § 42, Nr. 1 an die Beziehungen (5) geknüpften Be-

1) Die Beispiele 7), 8), 11) gelten ohne weiteres auch in gleicher Weise für die *Kolonnen*, die Beispiele 9) und 10) nach Vertauschung von μ und ν.

merkung (S. 271) den folgenden für die Anwendungen besonders nützlichen Spezialsatz:

(I a) *Wenn* $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$ *im weiteren Sinne existiert (wenn also die Doppelfolge* $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ *konvergiert oder eigentlich divergiert), so bestehen die Beziehungen:*

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\nu\to\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} \\ \lim\limits_{\mu\to\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} \end{array}\right\} = \lim_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}. \tag{1a}$$

Dabei brauchen also die einzelnen Zeilen und Kolonnen noch nicht zu konvergieren oder eigentlich zu divergieren, es können also $\underline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$ und $\overline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$ $\left(\text{bzw. } \underline{\lim}_{\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} \text{ und } \overline{\lim}_{\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}\right)$ durchweg *verschieden* ausfallen. Nichtsdestoweniger *existieren* (im weiteren Sinne) unter der gemachten Voraussetzung $\lim\limits_{\nu\to\infty} \underline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} \overline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$ $\left(\text{bzw. } \lim\limits_{\mu\to\infty} \underline{\lim}_{\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)},\ \lim\limits_{\mu\to\infty} \overline{\lim}_{\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}\right)$ und sind sämtlich einander gleich.

(Beispiele. Setzt man, wie in Beispiel 7) des vorigen Paragraphen $a_\mu^{(\nu)} = (-1)^{\mu+\nu}\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}\right)$, so folgt:

$$\underline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = -\frac{1}{\nu}, \quad \overline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{\nu}; \quad \underline{\lim}_{\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = -\frac{1}{\mu}, \quad \overline{\lim}_{\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{\mu};$$

andererseits: $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0$ und daher in Übereinstimmung mit Satz (Ia) auch:

$$\lim_{\nu\to\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu\to\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0.$$

Sei ferner: $a_\mu^{(\nu)} = \nu + (-1)^\mu$, so hat man:

$$\underline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \nu - 1, \quad \overline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \nu + 1; \quad \overline{\underline{\lim}}_{\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty; \quad \lim_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty,$$

und schließlich wieder:

$$\lim_{\nu\to\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu\to\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty.)$$

Sind außer der Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ auch die einzelnen Zeilen und Kolonnen *konvergent* oder *eigentlich divergent*, was z. B. stets der Fall sein

muß, wenn die Doppelfolge eine *monotone* ist[1]), so nehmen die Gleichungen (1a) die noch speziellere Form an:

$$(1\text{b})\qquad \left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{\nu\to\infty}\lim\limits_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}\\ \lim\limits_{\mu\to\infty}\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}\end{array}\right\} = \lim_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}.$$

2. Aus den Beziehungen (1a) folgt, daß die *Existenz* (im weiteren Sinne) von $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$ eine *hinreichende* Bedingung für die Existenz und das Zusammenfallen der *iterierten* Zeilen und Kolonnenlimites, also für das Bestehen der Relation:

$$(2)\qquad \lim_{\nu\to\infty}\overline{\lim_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu\to\infty}\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}$$

bildet. Diese letztere ist somit umgekehrt eine *notwendige* Bedingung für die *Existenz* von $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$. Daraus ergibt sich also insbesondere, daß $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$ sicher *nicht* existiert, wenn jene beiden iterierten Limites *verschieden* ausfallen. (Beispiele:

$$a_\mu^{(\nu)} = \frac{\mu}{\mu+\nu}\quad \left\{\begin{array}{ll}\lim\limits_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = 1, & \lim\limits_{\nu\to\infty}\lim\limits_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = 1,\\ \lim\limits_{\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0, & \lim\limits_{\mu\to\infty}\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0.\end{array}\right.$$

$$a_\mu^{(\nu)} = 2^{-\frac{\nu}{\mu}}\quad \left\{\begin{array}{ll}\lim\limits_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = 1, & \lim\limits_{\nu\to\infty}\lim\limits_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = 1,\\ \lim\limits_{\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0, & \lim\limits_{\mu\to\infty}\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0.\end{array}\right.$$

S. auch Beispiel 11) des vorigen Paragraphen.)

Andererseits erscheint die Existenz von $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$ *keineswegs* als *notwendig* für das Bestehen der Beziehung (2), wie die Beispiele 3), 4), 6) des vorigen Paragraphen (S. 276—278) zeigen, sodaß also die Beziehung (2) noch *keine hinreichende* Bedingung für die *Existenz* von $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$ liefert. Zur Illustration dieser Tatsache möge neben den soeben zitierten noch das folgende Beispiel als besonders lehrreich angeführt werden. Es sei für $\mu \geqq 1$, $\nu \geqq 1$:

$$a_\mu^{(\nu)} = (-1)^\mu \cdot \frac{\mu^2\nu^3}{\mu^3+\nu^6}.$$

1) Die Zeilen und Kolonnen einer monotonen Doppelfolge sind offenbar gleichfalls monotone Folgen. Dies folgt unmittelbar aus der Definition (9) des § 40 (S. 257), wenn man daselbst $\sigma = 0$ bzw. $\varrho = 0$ setzt.

Man hat hier zunächst:

$$\lim_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu\to\infty} (-1)^\mu \cdot \frac{\nu^3}{\mu + \frac{\nu^6}{\mu^2}} = 0, \quad \text{also auch:} \quad \lim_{\nu\to\infty}\lim_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0,$$

$$\lim_{\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} (-1)^\mu \cdot \frac{\mu^2}{\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^3 + \nu^3} = 0, \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \lim_{\mu\to\infty}\lim_{\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0.$$

Ferner ergibt sich:

$$\lim_{\nu\to\infty} a_\nu^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} (-1)^\nu \cdot \frac{\nu^2}{1+\nu^3} = 0,$$

und sogar für jedes ganzzahlige $p \geqq 1$, $q \geqq 0$, $r \geqq 1$:

$$\lim_{\nu\to\infty} a_{p\nu+q}^{(r\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} (-1)^{p\nu+q} \cdot \frac{(p\nu+q)^2 r^3 \nu^3}{(p\nu+q)^3 + r^6\nu^6}$$

$$= \lim_{\nu\to\infty} (-1)^{p\nu+q} \cdot \frac{\left(p+\frac{q}{\nu}\right)^2 \cdot r^3}{\left(p+\frac{q}{\nu}\right)^3 \cdot \frac{1}{\nu^2} + r^6\nu} = 0,$$

$$\lim_{\nu\to\infty} a_{r\nu}^{(p\nu+q)} = \lim_{\nu\to\infty} (-1)^{r\nu} \cdot \frac{r^2\nu^2(p\nu+q)^3}{r^3\nu^3 + (p\nu+q)^6}$$

$$= \lim_{\nu\to\infty} (-1)^{r\nu} \cdot \frac{r^2\left(p+\frac{q}{\nu}\right)^3}{r^3\frac{1}{\nu^2} + \left(p+\frac{q}{\nu}\right)^6 \cdot \nu} = 0.$$

Für diese Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ haben also nicht nur die beiden *iterierten Limites* und der *Limes* der *Hauptdiagonalen*folge den Wert 0, sondern *alle* möglichen *„geradlinigen“* Teilfolgen[1]) besitzen gleichfalls den *Grenzwert* 0. Nichtsdestoweniger findet man für $\mu = \nu^2$:

$$a_{\nu^2}^{(\nu)} = (-1)^{\nu^2} \cdot \frac{\nu}{2},$$

also:

$$\lim_{\nu\to\infty} a_{(2\nu-1)^2}^{(2\nu-1)} = -\infty$$

$$\lim_{\nu\to\infty} a_{(2\nu)^2}^{(2\nu)} = +\infty,$$

und daher:

$$\underline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = -\infty, \quad \overline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty.\text{[2])}$$

---

1) Bezüglich dieser Bezeichnung s. Fußn. 2, S. 267.

2) Verzichtet man auf die Darstellung der $a_\mu^{(\nu)}$ durch einen einheitlichen Ausdruck, so wird das wesentliche dieses Beispiels schon geleistet, wenn man setzt:

$$a_{\nu^2}^{(\nu)} = (-1)^\nu \cdot \nu, \quad \text{im übrigen:} \quad a_\mu^{(\nu)} = 0.$$

3. Ebensowenig, wie die *Existenz* und das *Zusammenfallen* der beiden *iterierten* Limites: $\lim\limits_{\nu\to\infty}\overline{\lim\limits_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}$ und $\lim\limits_{\mu\to\infty}\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}$ die *Existenz* des *Doppellimes* $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$ und somit (nach Satz (Ia)) auch dessen Zusammenfallen mit jenen sichert, ebensowenig brauchen auch die *iterierten unteren* bzw. *oberen* Limites: $\underline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\,\underline{\lim\limits_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}$, $\underline{\lim\limits_{\mu\to\infty}}\,\underline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}$ bzw. $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\,\overline{\lim\limits_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}$, $\overline{\lim\limits_{\mu\to\infty}}\,\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}$ mit den entsprechenden Doppellimites: $\underline{\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}$ bzw. $\overline{\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}$ zusammenzufallen. Die *notwendigen und hinreichenden* Bedingungen hierfür, zunächst für den Fall, daß die in Frage kommenden *iterierten* Limites *endlich* ausfallen, liefert der folgende Satz:

(II) *Für die Endlichkeit und das Zusammenfallen des iterierten unteren bzw. oberen Zeilenlimes mit dem unteren bzw. oberen Doppellimes ist notwendig und hinreichend, daß die Zeilen mit eventuellem Ausschlusse einer endlichen Anzahl nach unten bzw. nach oben gleichmäßig beschränkt sind.*

Das analoge gilt bezüglich der Kolonnen.

Beweis. Setzt man, wie bisher (S. 279, Gl. (30)):

$$\underline{\lim_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = \underline{a}^{(\nu)}, \quad \overline{\lim_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = \bar{a}^{(\nu)},$$

und bezeichnet mit $\underline{\alpha}^{(\nu)}$ die (endliche) untere Grenze

von $\underline{a}^{(\nu)}, \underline{a}^{(\nu+1)}, \underline{a}^{(\nu+2)}, \ldots\ldots,$

mit $\bar{\alpha}^{(\nu)}$ die (endliche) obere Grenze

von $\bar{a}^{(\nu)}, \bar{a}^{(\nu+1)}, \bar{a}^{(\nu+2)}, \ldots\ldots,$

so besagt die Behauptung, daß *erstens*:

$$(3) \qquad \underline{\lim_{\nu\to\infty}}\, \underline{a}^{(\nu)} = \underline{\lim_{\mu,\nu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = \underline{a} \quad \text{bzw.} \quad \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, \bar{a}^{(\nu)} = \overline{\lim_{\mu,\nu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = \bar{a}$$

(d. h. endliche Zahlen),

wenn ein bestimmtes n und sodann zu jedem $\varepsilon > 0$ ein bestimmtes m existiert, derart, daß (s. S. 279, Ungl. (34a)):

$$(4) \qquad \underline{\alpha}^{(\nu)} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \quad \text{bzw.} \quad a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{\alpha}^{(\nu)} + \varepsilon \quad \text{für: } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n,$$

und zugleich die $|\underline{\alpha}^{(\nu)}|$ bzw. $|\bar{\alpha}^{(\nu)}|$ für $\nu \geqq n$ unter einer endlichen Schranke A bleiben; und daß *zweitens*, wenn eine der Gleichungen (3) besteht (mit dem Zusatze, daß $\underline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, \underline{a}^{(\nu)}$ bzw. $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, \bar{a}^{(\nu)}$ *endliche* Zahlen vorstellen), daraus die Existenz der entsprechenden Bedingung (4) resultiert.

Angenommen, es bestehe zunächst die Voraussetzung (4).

Da die *unteren* Grenzen $\underline{\alpha}^{(\nu)}, \underline{\alpha}^{(\nu+1)}, \underline{\alpha}^{(\nu+2)}, \cdots$ eine *niemals abnehmende*,
die *oberen* Grenzen $\overline{\alpha}^{(\nu)}, \overline{\alpha}^{(\nu+1)}, \overline{\alpha}^{(\nu+2)}, \cdots$ eine *niemals zunehmende*
Folge bilden und numerisch unter A bleiben, so existieren die Grenzwerte:

(5) $$\lim_{\nu\to\infty} \underline{\alpha}^{(\nu)} = \underline{a} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\nu\to\infty} \overline{\alpha}_\nu = \overline{a}$$

in dem Sinne, daß $\underline{a}, \overline{a}$ bestimmte Zahlen vorstellen. Da andererseits $\underline{\alpha}^{(\nu)}$ die *untere* Grenze der Folge $\underline{a}^{(\nu)}, \underline{a}^{(\nu+1)}, \underline{a}^{(\nu+2)}, \cdots$ und $\overline{\alpha}^{(\nu)}$ die *obere* der Folge $\overline{a}^{(\nu)}, \overline{a}^{(\nu+1)}, \overline{a}^{(\nu+2)}, \cdots$, so ergibt sich auf Grund der Definition des unteren bzw. oberen Limes (s. § 36, S. 216, Gl. (16), (18)):

(5a) $$\underline{\lim}_{\nu\to\infty}\, \underline{a}^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} \underline{\alpha}^{(\nu)} = \underline{a} \quad \text{bzw.} \quad \overline{\lim}_{\nu\to\infty}\, \overline{a}^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} \overline{\alpha}^{(\nu)} = \overline{a}.$$

Man hat sodann bei passender Wahl von $n' \geqq n$:

(6) $$\underline{a} - \varepsilon \leqq \underline{\alpha}^{(\nu)} \quad \text{bzw.} \quad \overline{\alpha}^{(\nu)} \leqq \overline{a} + \varepsilon \quad \text{für: } \nu \geqq n',$$

also durch Kombination der Ungleichungen (4) und (6):

(7) $$\underline{a} - 2\varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \quad \text{bzw.} \quad a_\mu^{(\nu)} \leqq \overline{a} + 2\varepsilon \quad \text{für: } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n'.$$

Hieraus folgt zunächst, daß:

$$\underline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} \geqq \underline{a} - 2\varepsilon \quad \text{bzw.} \quad \overline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} \leqq \overline{a} + 2\varepsilon.$$

Da es aber freisteht, ε unbegrenzt zu verkleinern, und da andererseits nach Satz (I) dieses Paragraphen (S. 283):

$$\underline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} \leqq \underline{\lim}_{\nu\to\infty} \underline{a}^{(\nu)} = \underline{a} \quad \text{bzw.} \quad \overline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} \geqq \overline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} \overline{a}^{(\nu)} = \overline{a},$$

so findet man, daß:

(8) $$\underline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \underline{a} \quad \text{bzw.} \quad \overline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \overline{a},$$

d. h. wie behauptet:

(3) $$\underline{\lim}_{\nu\to\infty}\, \underline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \underline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \underline{a} \quad \text{bzw.} \quad \overline{\lim}_{\nu\to\infty}\, \overline{\lim}_{\mu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim}_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \overline{a}.$$

Die Bedingungen (4) sind also in der Tat *hinreichend* für die Endlichkeit des *iterierten* unteren bzw. oberen Zeilenlimes und das Zusammenfallen mit dem entsprechenden *Doppel*limes.

Um auch die *Notwendigkeit* der Bedingungen (4) für das Zustande-

kommen der Beziehungen (3) zu erweisen, nehmen wir jetzt das Bestehen dieser letzteren als Voraussetzung an.

Dann müssen sich zunächst auf Grund der Definition des unteren bzw. oberen *Doppel*limes (s. S. 261, Ungl. (7)) zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ zwei natürliche Zahlen m, n' so fixieren lassen, daß:

$$(9) \qquad \underline{a} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \quad \text{bzw.} \quad a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{a} + \varepsilon \quad \text{für: } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n'.$$

Da aber nach Gl. (5):

$$\underline{a} = \lim_{\nu \to \infty} \underline{\alpha}^{(\nu)} \quad \text{bzw.} \quad \bar{a} = \lim_{\nu \to \infty} \bar{\alpha}^{(\nu)}$$

und die Folge der $\underline{\alpha}^{(\nu)}$ niemals abnimmt, diejenige der $\bar{\alpha}^{(\nu)}$ niemals zunimmt, so hat man bei passender Wahl von $n \geqq n'$:

$$\underline{a} - \varepsilon \leqq \underline{\alpha}^{(\nu)} \leqq \underline{a} \quad \text{bzw.} \quad \bar{a} \leqq \bar{\alpha}^{(\nu)} \leqq \bar{a} + \varepsilon \quad \text{für: } \nu \geqq n.$$

Daraus folgt aber, daß die $|\underline{\alpha}^{(\nu)}|$ bzw. $|\bar{\alpha}^{(\nu)}|$ für $\nu \geqq n$ unter einer endlichen Schranke bleiben und daß:

$$\underline{\alpha}^{(\nu)} - \varepsilon \leqq \underline{a} - \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad \bar{a} + \varepsilon \leqq \bar{\alpha}^{(\nu)} + \varepsilon$$

und daher die Ungleichungen (9) durch die folgenden, für $\nu \geqq n$ bestehenden und mit (4) übereinstimmenden ersetzt werden können:

$$\underline{\alpha}^{(\nu)} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \quad \text{bzw.} \quad a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{\alpha}^{(\nu)} + \varepsilon.$$

Damit ist aber der ausgesprochene Satz (II) vollständig bewiesen.

In ganz analoger Weise ergibt sich das entsprechende Resultat bezüglich der Kolonnen.

4. Besonderes Interesse bietet wiederum der Fall, daß die *unteren* und *oberen* iterierten bzw. Doppellimites zusammenfallen. Wird das Zusammenfallen des iterierten unteren und oberen Zeilenlimes, mit anderen Worten, die *Existenz* von $\lim\limits_{\nu \to \infty} \overline{\lim\limits_{\mu \to \infty}}\, a_\mu^{(\nu)}$ als einer einzigen bestimmten Zahl vorausgesetzt, so ergibt sich zunächst aus dem Satze (II) der folgende Spezialsatz:

(IIa) *Wenn der iterierte Zeilenlimes überhaupt existiert, so ist für seine Endlichkeit und die Existenz eines (alsdann mit ihm zusammenfallenden) Doppellimes* ***notwendig und hinreichend,*** *daß die Zeilen mit eventuellem Ausschluß einer endlichen Anzahl* ***gleichmäßig beschränkt*** *sind.*

Der analoge Satz würde dann in bezug auf den iterierten Kolonnenlimes gelten. Nimmt man indessen den Satz (Ia) (S. 284) zu Hilfe, so

folgt schon aus der nach dem vorstehenden Satze (IIa) resultierenden Existenz eines endlichen *Doppel*limes diejenige eines damit gleichwertigen *iterierten Kolonnen*limes und diese letztere involviert dann nach dem für die Kolonnen geltenden Analogon zu Satz (IIa) auch die *gleichmäßige Beschränktheit* der *Kolonnen*. Man kann daher den Satz (IIa), wenn man überdies noch berücksichtigt, daß die *Existenz* eines *endlichen Doppel*limes mit der *Konvergenz* der Doppelfolge zusammenfällt, durch den folgenden allgemeineren ersetzen:

(IIb) *Für die Konvergenz der Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ ist notwendig und hinreichend, daß die Zeilen oder Kolonnen mit eventuellem Ausschluß einer endlichen Anzahl gleichmäßig beschränkt sind*[1]) *und daß* $\lim\limits_{\nu\to\infty}\overline{\underline{\lim\limits_{\mu\to\infty}}}\, a_\mu^{(\nu)}$ *bzw.* $\lim\limits_{\mu\to\infty}\overline{\underline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}}\, a_\mu^{(\nu)}$ *als eindeutig bestimmte Zahl existiert. Sind diese Bedingungen für die Zeilen und für* $\lim\limits_{\nu\to\infty}\overline{\underline{\lim\limits_{\mu\to\infty}}}\, a_\mu^{(\nu)}$ *erfüllt, so bestehen sie ohne weiteres auch für die Kolonnen und für* $\lim\limits_{\mu\to\infty}\overline{\underline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}}\, a_\mu^{(\nu)}$, *vice versa, und man hat in beiden Fällen:*

(10) $$\lim_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty}\overline{\underline{\lim_{\mu\to\infty}}}\, a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu\to\infty}\overline{\underline{\lim_{\nu\to\infty}}}\, a_\mu^{(\nu)}.$$

Da es freisteht, den *Doppel*limes $\lim\limits_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)}$, sobald seine Existenz feststeht, durch den speziellen für $\mu = \nu$ resultierenden, also durch den *einfachen* Limes $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu^{(\nu)}$ zu ersetzen, so hat man unter den Voraussetzungen des Satzes (IIb) insbesondere:

(11) $$\left.\begin{cases} \lim\limits_{\nu\to\infty}\overline{\underline{\lim\limits_{\mu\to\infty}}}\, a_\mu^{(\nu)} \\ \lim\limits_{\mu\to\infty}\overline{\underline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}}\, a_\mu^{(\nu)} \end{cases}\right\} = \lim_{\nu\to\infty} a_\nu^{(\nu)}.$$ [2])

---

1) Eine *Doppel*folge kann also *konvergent* sein, *ohne daß* eine einzige *Zeile* (oder *Kolonne*) *konvergiert*. Dagegen kann bei einer konvergenten Doppelfolge höchstens eine *endliche* Anzahl von *Zeilen (Kolonnen) eigentlich divergieren* bzw. ein *unendliches Grenzintervall* besitzen.

2) Ein Beispiel für die Anwendung dieses Prinzips d. h. der Möglichkeit, einen iterierten Limes durch den einfachen Limes der „Hauptdiagonale" zu ersetzen, bietet schon die in § 28, Nr. 2 gegebene Darstellung des Grenzwertes einer konvergenten Folge unendlicher Systembrüche $\sigma_\mu^{(\nu)}$ (wo μ die *Gliederzahl* jedes einzelnen Bruches = *Kolonne*, ν seine *Nummer* = *Zeile* der Doppelfolge $\left(\sigma_\mu^{(\nu)}\right)$ bezeichnet) vermittelst der Beziehung:

5. Es bleiben noch die Beziehungen der *iterierten* Limites zu dem unteren und oberen *Doppel*limes für den Fall zu untersuchen, daß dieselben (positiv oder negativ) *unendlich groß* ausfallen. Hat man zunächst für die *iterierten Zeilen*limites:

$$(12) \qquad \underline{\lim}_{\nu \to \infty}\, \underline{\lim}_{\mu \to \infty}\, a_\mu^{(\nu)} = -\infty \quad \text{bzw.} \quad \overline{\lim}_{\nu \to \infty}\, \overline{\lim}_{\mu \to \infty}\, a_\mu^{(\nu)} = +\infty,$$

so folgt aus dem Satze (Ia) dieses Paragraphen, daß auch:

$$\underline{\lim}_{\mu, \nu \to \infty}\, a_\mu^{(\nu)} = -\infty \quad \text{bzw.} \quad \overline{\lim}_{\mu, \nu \to \infty}\, a_\mu^{(\nu)} = +\infty.$$

Es bestehen also in diesem Falle die den Hauptaussagen des Satzes (II) dieses Paragraphen (S. 287) analogen Beziehungen:

$$(13) \qquad \underline{\lim}_{\mu, \nu \to \infty}\, a_\mu^{(\nu)} = \underline{\lim}_{\nu \to \infty}\, \underline{\lim}_{\mu \to \infty}\, a_\mu^{(\nu)} \quad \text{bzw.} \quad \overline{\lim}_{\mu, \nu \to \infty}\, a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim}_{\nu \to \infty}\, \overline{\lim}_{\mu \to \infty}\, a_\mu^{(\nu)}$$

ohne jede weitere Voraussetzung. (Analog wiederum für die Kolonnen.)

Des weiteren bleibt dann für ein Zusammenfallen der *iterierten Zeilen*limites noch als letzte Möglichkeit:

$$(14) \qquad \lim_{\nu \to \infty}\, \overline{\underline{\lim}}_{\mu \to \infty}\, a_\mu^{(\nu)} = +\infty \quad \text{bzw.} \quad = -\infty.$$

Wenn dann der *Doppel*limes $\lim\limits_{\mu, \nu \to \infty} a_\mu^{(\nu)}$ überhaupt *existiert*, so folgt wiederum aus dem Satze (Ia), daß er mit dem *iterierten Zeilen*limes (14) zusammenfällt und daß das gleiche auch für den *iterierten Kolonnen*limes gilt. Das analoge Resultat ergibt sich, wenn man statt von der Voraussetzung (14) von der entsprechenden für den *iterierten Kolonnen*limes $\lim\limits_{\mu \to \infty} \overline{\underline{\lim}}_{\nu \to \infty} a_\mu^{(\nu)}$ ausgeht.

Da andererseits die Beziehung $\lim\limits_{\mu, \nu \to \infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty$ bzw. $= -\infty$ die *gleichmäßige Unbeschränktheit* der *Zeilen* und *Kolonnen* nach sich zieht (s. S. 280, Fußnote 2) *und umgekehrt*, überdies auch mit der *eigentlichen Divergenz* der Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ zusammenfällt, so lassen sich die vorstehenden Betrachtungen zu dem folgenden mit dem Satze (IIb) ana-

---

$$\lim_{\nu \to \infty} \lim_{\mu \to \infty} \sigma_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu = \infty} \sigma_\nu^{(\nu)}.$$

(a. a. O. S. 169, Gl. (11)). Diese Darstellung ist zulässig, da, wie man leicht erkennt, die Zeilen $\sigma_\mu^{(\nu)}$ ($\nu = 0, 1, 2, \cdots$) *gleichmäßig konvergieren.*

logen[1]) Satze zusammenfassen, der im übrigen nichts neues aussagt, sondern, wie in der eben erwähnten Fußnote bereits angedeutet wurde, lediglich eine andere Ausdrucksweise für die *Definition* der eigentlichen Divergenz einer Doppelfolge enthält:

(III) *Für die eigentliche Divergenz der Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ ist notwendig und hinreichend, daß die Zeilen oder Kolonnen gleichmäßig unbeschränkt sind. Ist diese Bedingung für die Zeilen erfüllt, so besteht sie auch für die Kolonnen*[2]), *vice versa, und man hat sodann:*

$$(15)\quad \lim_{\mu,\nu\to\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} \overline{\lim_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu\to\infty} \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = +\infty \quad \text{bzw.} \quad = -\infty.$$

1) Ein Unterschied in der Formulierung der beiden Sätze besteht darin, daß bei dem Satze (IIb) die Existenz von $\lim\limits_{\nu\to\infty} \overline{\lim\limits_{\mu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}$ oder $\lim\limits_{\mu\to\infty} \overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}$ ausdrücklich vorausgesetzt werden muß, was hier *nicht* der Fall ist.

2) S. § 42, Nr. 4, Ungl. (38) (S. 280) und die daran geknüpfte Bemerkung.